

1 Komplexe Zahlen

(i) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie den Betrag.

a) $z_1 = 1 + i$

b) $z_2 = 2 - 3i$

c) $z_3 = \sqrt{3} + i$

(ii) Skizzieren Sie die Menge aller komplexen Zahlen, die der jeweiligen Bedingung genügen.

a) $|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq 4$

b) $|z| \leq 2\operatorname{Re}(z)$

(iii) Finden Sie die Nullstellen über dem Zahlenraum $\mathbb{C}$.

$$x^2 - 10x + 34 = 0$$

(iv) Vereinfachen Sie auf die Form $a + ib$.

a) $(1 + i)^5$

b) $\frac{1}{2 + 3i}$

c) $\frac{(-i + 1)^3}{i + 2}$

(v) Bestimmen Sie alle $x_n = a_n + ib_n$ welche die Gleichung $x^3 + 27 = 0$ erfüllen. Überprüfen Sie Ihr Ergebniss, indem Sie x_n^3 berechnen.

(vi) Jede komplexe Zahl ist ein Punkt auf der komplexen Ebene $(\operatorname{Re}, \operatorname{Im})$. Dieser lässt sich in Polarkoordinaten ausdrücken. Die komplexe Exponentialfunktion ist gegeben als

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi).$$

Somit lässt sich jede komplexe Zahl schreiben als

$$z = a + i \cdot b = r \cdot e^{i\phi}, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Berechnen Sie $\ln(z)$ mit $z = 3i + 4$.

(vii) Schreiben Sie $z = 1 + i$ in Polardarstellung und berechnen Sie z^5 , siehe (iv).

(viii) Berechnen Sie

a) i^3

b) i^4

c) i^{13}

d) $(-i)^3$

2 Integralrechnung

Finden Sie die Stammfunktionen und vereinfachen Sie diese so weit wie möglich und berechnen Sie das Integral.

a) $\int \frac{\frac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)} - \frac{4}{\cos^2(x)}}{\tan^3(x) - \tan^2(x) - 4 \tan(x) + 4} dx$

b) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} dx$