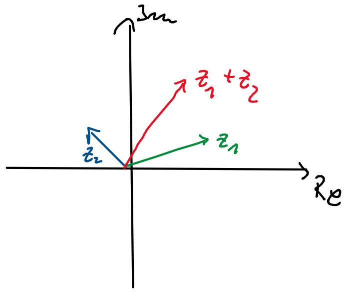
Komplexe Zahlen II + Fun

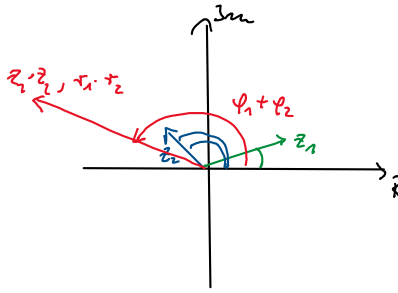
Thursday, 9 October 2025 09:12

Wdhl: $z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$

Rechnen $+, -, \cdot$: mit $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|_{\in\mathbb{R}}}$

$+, -$ wie Vektoren im $\mathbb{R}^2$





Wdhl Multiplikation Vektoren im $\mathbb{R}^3$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \in \mathbb{R}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

wir hatten $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Taylorreihe

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \dots = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$= 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$

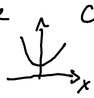
analog:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{\overbrace{\cos\varphi + \cos(-\varphi)}^{2\cos\varphi} + \overbrace{i\sin\varphi + i\sin(-\varphi)}^{=0}}{2}$$

$= \cos\varphi$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

vergleiche $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, das rechtfertigt diese Def. $\frac{e^{+x} + e^{-x}}{2} = \cosh x$



$\sinh x = \frac{e^{+x} - e^{-x}}{2}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

für Schwingungen und Wellen

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} \cdot e^{ib} = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$$

$\Downarrow$ $\quad\quad$ $\Downarrow$

$$\cos(a+b) + i\sin(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b + i(\sin a\cos b + \cos a\sin b)$$

Realteile und Imaginärteile müssen gleich sein l.S. = r.S.

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

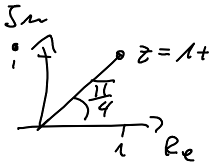
Additionstheoreme

Funktionen mit komplexen Zahlen

$n \in \mathbb{Z}/0$

$z^n = (a+ib)^n = r^n e^{in\varphi}$; speziell $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1\cdot(-i)}{i(-i)} = \frac{-i}{1} = -i$

$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}$



$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Bsp. $y = \sqrt{z}$; $z = 1+i$

$y = \sqrt{r}\, e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{2}\right)}$

$y = \sqrt[4]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\pi k\right)}$; $k=0$ & $k=1$

$\ln z = \ln\left(r e^{i(\varphi+2\pi k)}\right) = \ln r + i(\varphi + 2\pi k)$

⋮ ≙ Funktionentheorie

komplexe Zahlen als Matrizen

$$z = a+ib = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{E}} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{I}}$$

$$\mathbb{E}\cdot\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathbb{E}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{I}\cdot\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{E}$$

bei Matrizen oft $A\cdot B \neq B\cdot A$

$$z_1\cdot z_2 = \left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}\right]\cdot\left[\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & a_1a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1\cdot 0 + 0b_2 & -a_1b_2 + 00 \\ a_1b_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b_1a_2 \\ b_1a_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_1b_2 & 0 \\ 0 & -b_1b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & 0 \\ 0 & a_1a_2 - b_1b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -a_1b_2 - b_1a_2 \\ a_1b_2 + a_2b_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (a_1a_2 - b_1b_2)\cdot\mathbb{E} + (a_1b_2 + a_2b_1)\,\mathbb{I} = a+ib \overset{\wedge}{=} z_1\cdot z_2$$

//

etwas Spaß: $\cos z = 2$; $z \in \mathbb{C}$

$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 2 \quad |\cdot 2$

$e^{iz} + e^{-iz} = 4 \quad | e^{iz} = t$

$t + \frac{1}{t} = 4 \quad | \cdot t$

$t^2 - 4t + 1 = 0$

$t_{1/2} = 2 \pm \sqrt{3} = e^{iz} \quad | \ln$

$$t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$t_{1/2} = 2 \pm \sqrt{3} = e^{iz} \quad \Big| \ln$$

$$iz = \ln(2 \pm \sqrt{3})$$

e^{iz} ist periodisch

$$z = -i \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2\pi k \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

---

noch mehr Fun

$i = r e^{i\varphi}$ mit $r = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$i^i = \left(1 e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i \qquad \left(e^{ax}\right)^b = e^{abx}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{2} \cdot i} = e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}} = 0{,}2\ldots \in \mathbb{R}$$

auch $i^i = e^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k i}$; $k \in \mathbb{Z}$

---

wie geht es weiter

nat. Zahlen $n \in \mathbb{N}$ – es gibt ein kleinstes n

ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ – jede Zahl hat Vorgänger / Nachfolger

rationale Zahlen $p \in \mathbb{Q}$ – jedes p als Quotient aus 2 ganzen Zahlen

reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}$ – $a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$, ∞-Dezimalbruchdarstellung

komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ – $z^2 = -1 \Rightarrow z = \pm i$, also $z_1 > z_2$ sinnlos

– keine Ungleichungen in z, auch kein $+\infty$ versus $-\infty$

nur ∞ mit $|z| \to \infty$; $i\infty$; $-i\infty$

$$a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib), \text{ geht immer}$$

auch

$$a^4 + b^4 = \left(a - \frac{1+i}{2}\sqrt{2}\, b\right)(\ )(\ )(\ )$$

aber was nicht geht ist $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (ax_1 + by_1 + cz_1 + dt_1)(ax_2 + bx_2 + cx_2 + t_2)$

geg.: a, b, c, d suchen $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, t_1, t_2$

aus multiplizieren $\Rightarrow$ 10 Gleichungen für 8 Variablen $\Rightarrow$ geht nicht.

Lösung $\Rightarrow$ Quaternionen $z \in \mathbb{H}$ – Hamilton

nun z mit i; j; k und Realteil mit $i \cdot i = -1$; $j \cdot j = -1$; $k \cdot k = -1$

$z = a + bi + cj + dk$ aber $i \cdot j = k$; $j \cdot i = -k$

$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 \neq z_2 \cdot z_1 \text{ in } \mathbb{H}$$

$\hat{=}$ Hyperkomplexe Zahlen