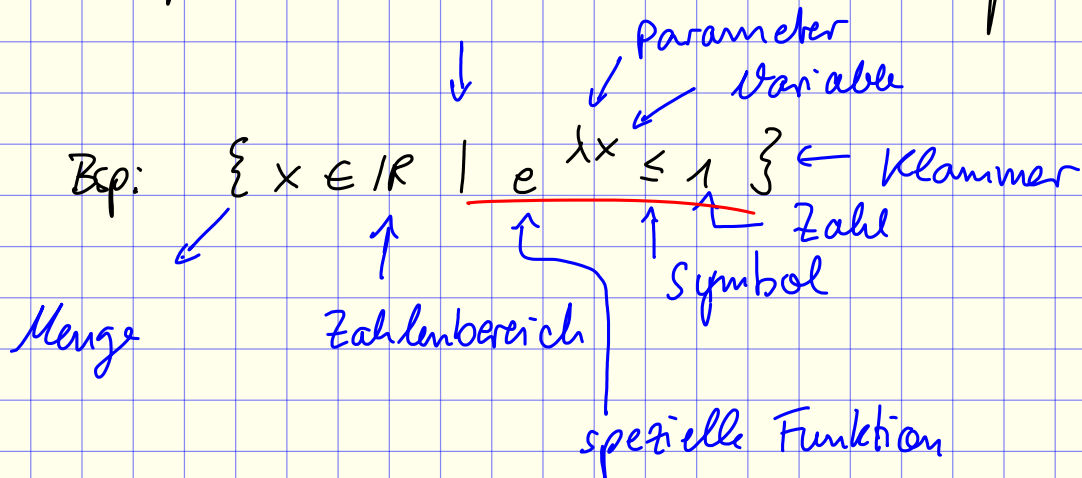


Vorkurs Rechnen 2023

1. Elementare Algebra

1.0. Grundbegriffe / Einführung

Mathematik als Sprache mit Vokabular um Probleme präzise darzustellen



Menge: Zusammenfassung unterschiedlicher Objekte. Für jedes Objekt muss eindeutig feststellbar sein, ob es zur Menge gehört oder nicht.

Zur Menge gehörende Objekte: Elemente der Menge.

Bsp: Studierende im Hörsaal

Autos mit Kennzeichen „SB“

Menge aller guten Filme ↗

Menge aller japanischen Filme

Aufzählende Darstellung

• Zahlen kleiner als 5: $\{1, 2, 3, 4\}$

• Menge aller Buchstaben im Namen „Anne“: $\{A, e, n\}$

Variable: Platzhalter für ein Objekt, welches verschiedene Werte einer Menge annehmen kann

1.1 Grundrechenarten

1.1.1 Zahlenräume

- natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ \mathbb{N}_0
- reelle Zahlen \mathbb{R}
- ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
 $0, 1, -1, 2, -2, \dots$
- rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$
- komplexe Zahlen $\mathbb{C} = \{z = a + i \cdot b \mid a, b \in \mathbb{R},$
 $i := \sqrt{-1}\}$
- irrationale Zahlen $\pi = 3,1415 \dots$
 $e = 2,718 \dots$

1.1.2 Kommaverschreibung und wissenschaftliche Schreibweise große Zahlenbereiche: Größenordnungen

Bsp: Viskosität η [Pa s]

Wasser (20°C) 0,001 Pa s

Glycerin 1,48 Pa s

Honig ~ 10 Pa s

Bitumen $\sim 10^{10}$ Pa s

Glas $\sim 10^{20}$ Pa s

\Rightarrow Exponentialdarstellung $m \times 10^n$, $n \in \mathbb{Z}$
 $m \in \mathbb{R}$
 $m \in \pm n$; $m \in \pm n$

10^0	1				
10^3	$1e+3$	kilo (k)	10^{-3}	$1e-3$	milli (m)
10^6	$1e+6$	mega (M)	10^{-6}	$1e-6$	mikro (μ)
10^9	$1e+9$	giga (G)	10^{-9}	$1e-9$	nano (n)
10^{12}	$1e+12$	tera (T)	10^{-12}	$1e-12$	piko (p)
10^{15}	$1e+15$	peta (P)	10^{-15}	$1e-15$	femto (f)

Kommaverschiebung

Bsp: $2,565 \cdot 100 = 2,565 \cdot 10^2 = 256,5$

$98,42 : 10^{-3} = 98,42 \cdot 10^3 = 98420$

Zahlen in wissenschaftlicher Schreibweise

Bsp. $0,000\ 000\ 3849 = 3,849 \cdot 10^{-7}$

$40260\ 0000 = 4,026 \cdot 10^8$

1.1.3 Rechengesetze

- Kommutativgesetz: $a+b = b+a$; $a \cdot b = b \cdot a$

- Assoziativgesetz: $a + (b+c) = (a+b) + c = a+b+c$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$$

- Distributivgesetz: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

$$(b-c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$$

Vorzeichen und Klammern

Bsp: $(3f + 4s)(2t - d) = (3f + 4s)2t - (3f + 4s)d$
 $= 6ft + 8st - 3fd - 4sd$

1.1.4 Binomische Formeln

$$1) (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2) (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3) (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

1.1.5 Proportionalität

Zwei verschiedene Größen stehen immer im gleichen Verhältnis zueinander.

→ Dreisatz

1.2 Bruchrechnen

1.2.1 Kürzen und Erweitern

→ Zähler und Nenner mit gleichem Term $\neq 0$

multipliziert / dividiert

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b} ; \quad \frac{a+c}{b} = \frac{k(a+c)}{k \cdot b} \neq \frac{k \cdot a + c}{b}$$

1.2.2 Addieren und Subtrahieren von Brüchen

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d} \\ &= \frac{1}{b \cdot d} \cdot (a \cdot d + c \cdot b) \end{aligned}$$

1.2.3 Multiplizieren und Dividieren von Brüchen

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} ; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

1.3 Prozentrechnung

$$\text{Prozentsatz } p \% = \frac{p}{100} = \frac{\text{Prozentwert } P}{\text{Grundwert } G}$$

$p \in \mathbb{R}$

1.4 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

- Potenzen $\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}} = a^n$, $n \in \mathbb{N}$
 a : Basis, n : Exponent

Potenzgesetze

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^x / a^y = a^{x-y}$$

$$a^x b^x = (a \cdot b)^x$$

$$a^x / b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad a^1 = a; \quad a^0 = 1$$

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\begin{aligned} \text{Bsp: } & \underline{(2x^2 \cdot x)^2 \cdot x^{-5}} \quad x \neq 0 \\ & = (2x^3)^2 \cdot x^{-5} \\ & = 2^2 x^6 \cdot x^{-5} = \underline{4x} \end{aligned}$$

Wurzeln $\sqrt[n]{a}$ a : Radikand $a \geq 0$

n : Wurzelexponent $n \geq 1$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}, \quad a \geq 0$$

denn: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

- Wurzeln von Zahlen ≥ 0 (später: komplexe Zahlen)

$$\sqrt{a^2} = |a|, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{a} = a^{1/2}$$

- ungerades $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R} \rightarrow b^n = a$ hat

genau eine Lösung $\sqrt[n]{a}$

- gerades $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R} \rightarrow b^n = a$ hat eine positive und eine negative Lösung $b_1 = \sqrt[n]{a} > 0$,
 $b_2 = -\sqrt[n]{a} < 0$

- gerades $n \in \mathbb{N}$ und $a < 0$ $b^n = a$

\rightarrow keine reelle Lösung Bsp $x^2 = -1$

$$\rightarrow x = \pm \sqrt{-1} = \pm i$$

- Wurzelgesetze:

$$\rightarrow \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\rightarrow \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\rightarrow \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b}$$

$$\rightarrow \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}$$

Bsp: $(a+b)^{2/3} \cdot \sqrt[3]{(a+b)^4} = (a+b)^{2/3} \cdot (a+b)^{4/3}$
 $= (a+b)^{(2/3+4/3)}$
 $= (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

- Logarithmen $\log_a b = x$

„Logarithmus b zur Basis a “

$$a, b > 0; x \in \mathbb{R}, b \neq 1$$

Spezialfälle: $a = 10$ $\log_{10} = \log = \lg$ dekadischer \lg
 $a = e$ $\log_e = \ln$ natürlicher \lg

$$a^x = b \quad | \quad \log_a$$

$$\log_a(a^x) = \log_a(b) \Rightarrow x = \log_a(b)$$

welches x liefert $a^x = 1 \rightarrow x = 0$

Logarithmusgesetze

$$\log_c(a \cdot b) = \log_c(a) + \log_c(b)$$

$$\log_c(a/b) = \log_c(a) - \log_c(b)$$

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} = \frac{\lg(b)}{\lg(a)}$$

$$\log_c(b^a) = a \cdot \log_c(b) \quad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

Bsp:

$$\begin{aligned} \ln\left(\sqrt[4]{\frac{a^2 c}{b d^2}}\right) &= \ln\left(\frac{a^{2/4} \cdot c^{1/4}}{b^{1/4} \cdot d^{2/4}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{a^{1/2} \cdot c^{1/4}}{b^{1/4} \cdot d^{1/2}}\right) = \ln\left(a^{1/2} \cdot c^{1/4}\right) - \ln\left(b^{1/4} \cdot d^{1/2}\right) \\ &= \ln\left(a^{1/2}\right) + \ln\left(c^{1/4}\right) - \ln\left(b^{1/4}\right) - \ln\left(d^{1/2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(a) + \frac{1}{4} \ln(c) - \frac{1}{4} \ln(b) - \frac{1}{2} \ln(d) \end{aligned}$$