3.1.5 Irrationale Funktionen

Bsp: $y = \sqrt[n]{x}$ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

D für Wurzelfunktionen

$D = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ für gerade n

$D = \mathbb{R}$ für n ungerade

$x^2 \geq 0$ $x^3 \in \mathbb{R}$

für ungerade n ist Wurzelfunktion $y = \sqrt[n]{x}$ $=: f(x)$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion der Potenzfunktion $y = f(x) = x^n$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

für gerade n ——" —— $y = \sqrt[n]{x}$ $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ ——" —— der Potenzfunktion $y = f(x) = x^n$, $f: \underline{[0,\infty)} \to [0,\infty)$

Bijektivität

Exponentialfunktion

$y = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+$

mit $a = e$ Eulerzahl $2{,}718\ldots$ $y = e^x$

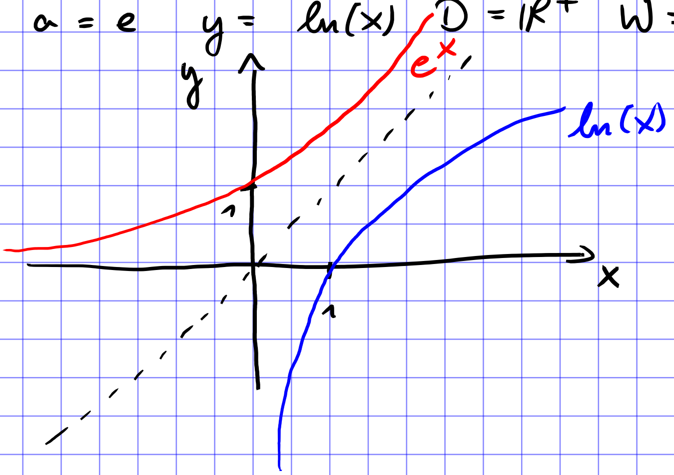
$D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}^+$

Logarithmus

$y = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$

$= \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

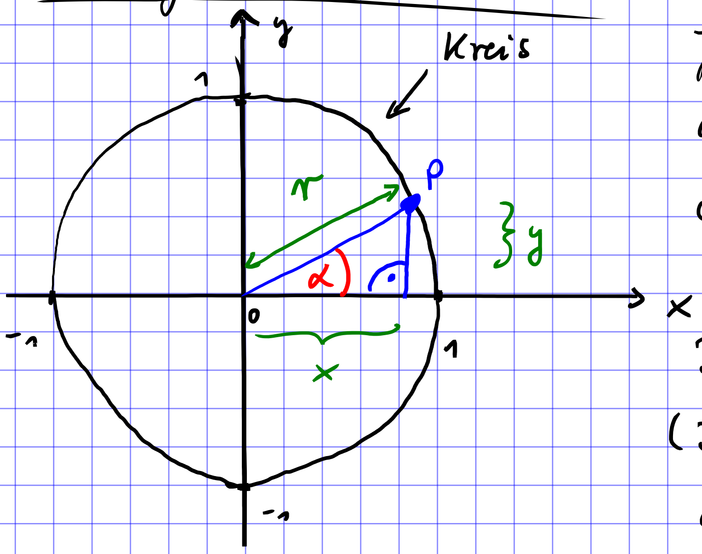
mit $a = e$ $y = \ln(x)$ $D = \mathbb{R}^+$ $W = \mathbb{R}$



es handelt sich bei e^x und $\ln(x)$ auch um transzendente Funktionen

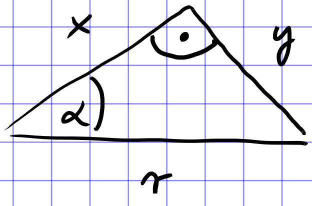
4. Trigonometrie

4.1 Trigonometrische Funktionen



Jedem Punkt auf dem Einheitskreis ordnen wir ein rechtwinkliges Dreieck zu. (Durch Projektion auf x-Achse)

Den Winkel zwischen Hypotenuse und x-Achse nennen wir α.



Das Gradmaß

α in Grad (°) $0° \leq \alpha < 360°$

oder $-180° < \alpha \leq 180°$

Ursprung: historisch, Hexagesimalsystem
Ein Grad wird unterteilt in 60 Winkelminuten und 3600 Winkelsekunden.

Das Bogenmaß

Verhältnis von Umfang U zu Durchmesser d

$$U = \underset{\uparrow}{\pi} \cdot d$$

Kreiszahl $\pi = 3,14159265358979..$

Man gibt α in Radianten an. (rad)

$$0 \le \alpha < 2\pi$$

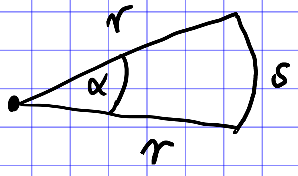
$$-\pi < \alpha \le \pi$$

Umrechnung

$$1\ \text{rad} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}2958°$$

$$1° = \frac{2\pi}{360}\ \text{rad} = \frac{\pi}{180}\ \text{rad} \approx 0{,}01745\ \text{rad}$$

Bogenlänge eines Kreissegments

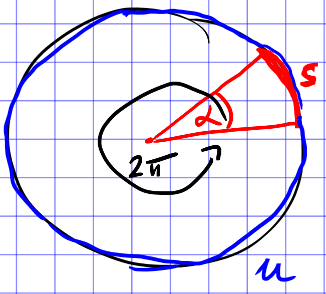


$$s = r \cdot \alpha \qquad [\alpha] = \text{rad}$$

$$U = 2\pi r$$

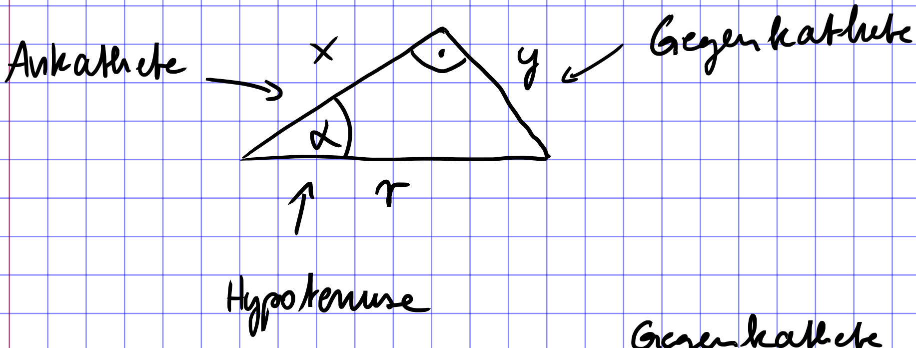
$$\frac{s}{U} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow s = \underbrace{\frac{U}{2\pi}}_{r}\,\alpha$$

$$s = r \cdot \alpha$$



$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{s}{U}$$

Definition: trigonometrische Funktionen



Sinus: $\sin(\alpha) = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \dfrac{y}{r}$

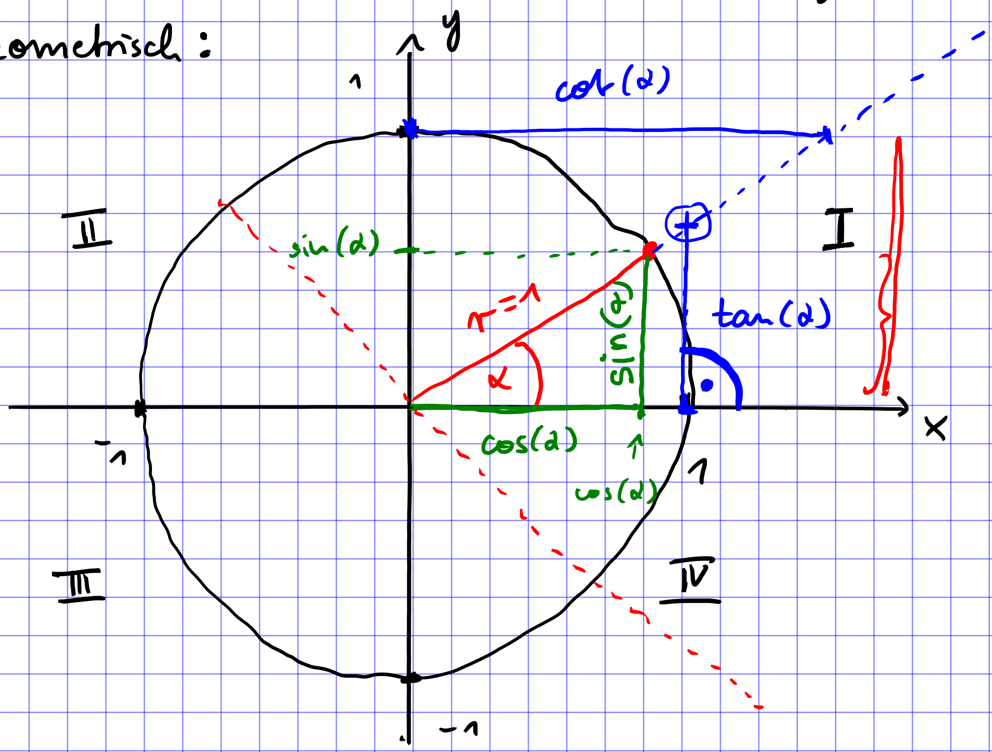
Cosinus: $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \dfrac{x}{r}$

Tangens: $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$

$$= \frac{y}{x}$$

Kotangens: $\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{x}{y}$

geometrisch:

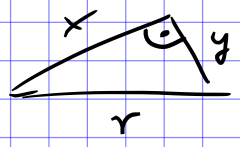


Vorzeichen trigonometrischer Funktionen

Quadrant	sin	cos	tan	cot
I	+	+	+	+
II	+	−	−	−
III	−	−	+	+
IV	−	+	−	−

Beziehungen für gleiche Winkel und Umrechnungsformeln

Satz des Pythagoras: $x^2 + y^2 = r^2$



Einheitskreis:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \underbrace{\cos^2\alpha}_{x^2}}$; $y = \pm\sqrt{1-x^2}$

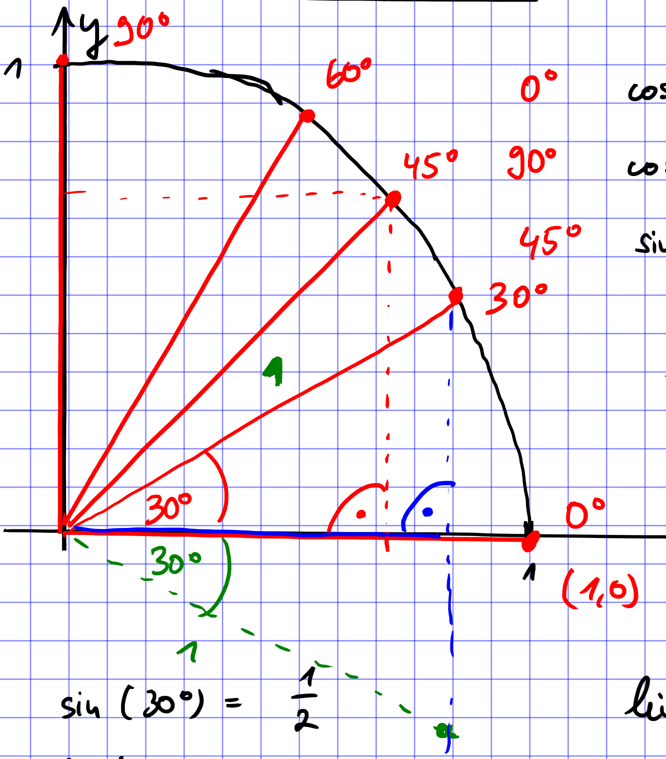
Kreisbogen

$$1+\tan^2\alpha = 1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\overset{1}{\boxed{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

analog: $1+\cot^2(\alpha) = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

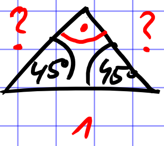
Spezielle Winkel / Stützstellen



0° $\cos(0°) = 1, \sin(0°) = 0$

90° $\cos(90°) = 0, \sin(90°) = 1$

45° $\sin(45°) = \cos(45°)$



$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}}$

$a^2+b^2 = 1$

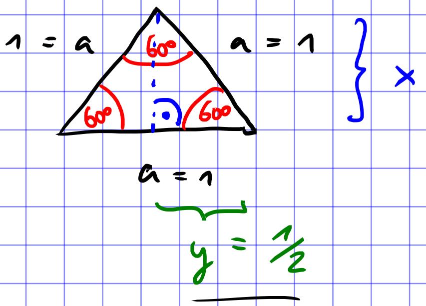
hier: $45° \rightarrow a = b$

$a^2 + a^2 = 1$

$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{1}{2}}$

30° $\sin(30°) = \frac{1}{2}$

gleichseitiges Dreieck



$a^2+b^2 = c^2$

$x^2 = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= \frac{3}{4} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{4}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = \frac{1}{2}$

60° analog $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos(60°) = \frac{1}{2}$

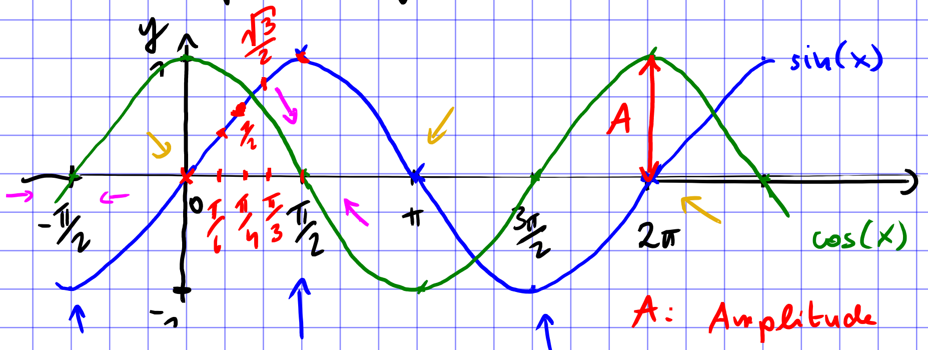
Wertetabelle

I $\quad 0 \le \alpha < 90°$

α					
Gradmaß	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	0
$\tan(\alpha)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\cot(\alpha)$	—	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0

II - IV : gleich mit entsprechenden Vorzeichen und Reihenfolge

4.2 Graphen trigonometrischer Funktionen



Sinusfunktion

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$, Wertemenge $W = [-1, 1]$

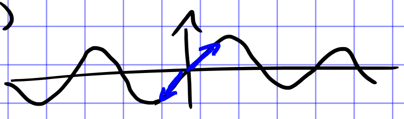
Periode $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ „Periode 2π"

(allg: periodische Funktion $f(x+a) = f(x)$)

Amplitude $= 1$, $|\sin(x)| \le 1$ beschränkt

$\sin(-x) = -\sin(x)$

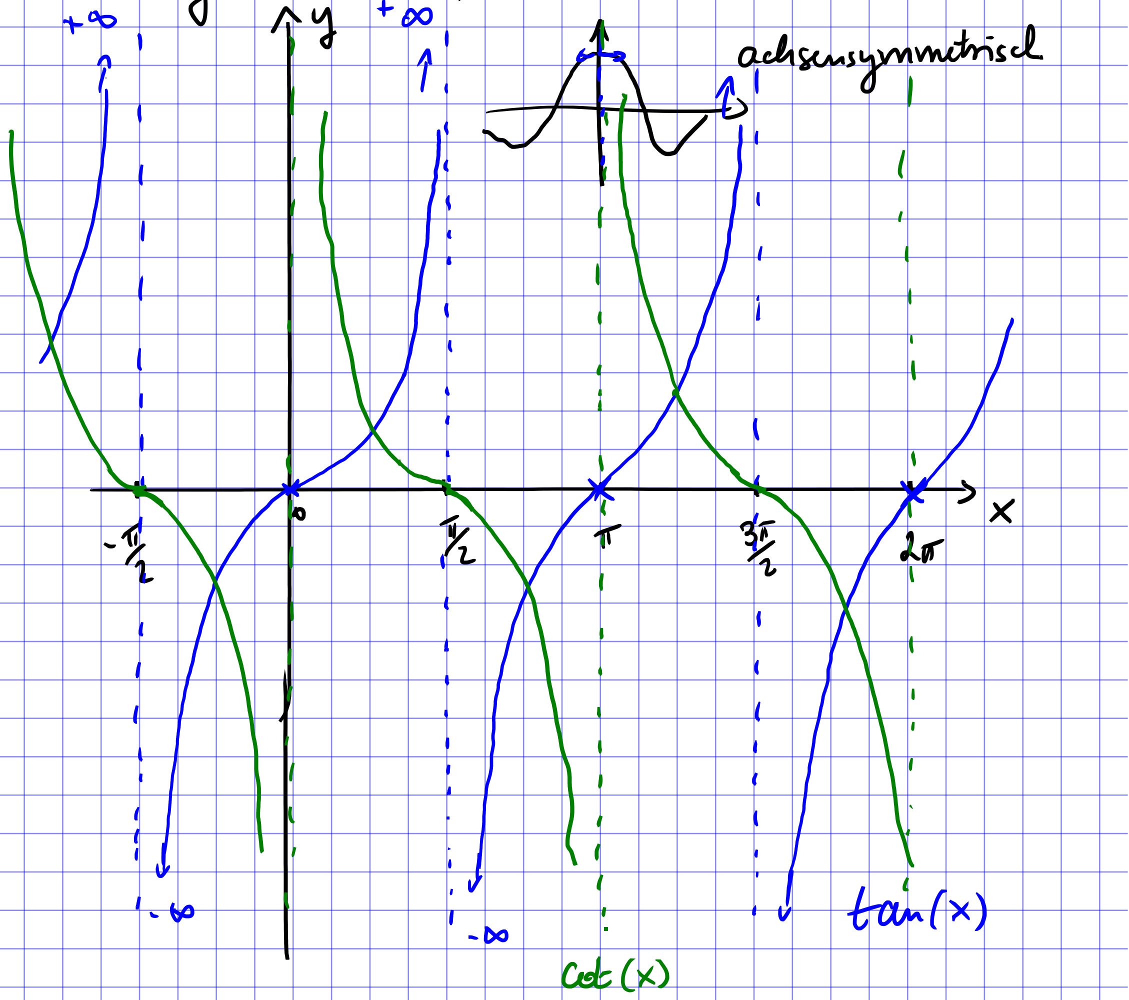
punktsymmetrisch zu O



ungerade Funktion

Kosinusfunktion

analog zu Sinus, Ausnahme: $\cos(-x) = \cos(x)$



Tangensfunktion

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R} \setminus \underbrace{\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}_{\text{Polstellen } x_p}$

Wertebereich: $W = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_p^-} \tan(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to x_p^+} \tan(x) = -\infty$

$x < x_p$ $\qquad$ $x > x_p$

Asymptoten: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \begin{array}{l} \leftarrow \text{ungerade} \\ \leftarrow \text{gerade} \end{array}$$

also ungerade $\tan(-x)$

$= -\tan(x)$

Kotangensfunktion: analog, nur Poestellen

$x_p = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Periode von Tangens und Kotangens : π

Kürzen von Vz ändert Periode $2\pi \to \pi$

4.3 Additionstheoreme

Winkelvielfache :

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\sin(3\alpha) = 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha)$$

$$\vdots$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Summen / Differenzen von Winkeln :

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = -\underline{\sin\alpha\sin\beta} + \cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \underline{\underline{\sin\alpha\sin\beta}} + \cos\alpha\cos\beta$$

Produkt trigonometrischer Funktionen

$$\underline{\sin(\alpha)\sin(\beta)} = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

Potenzen

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\alpha)\right)$$

$$\sin^3\alpha = \frac{1}{4}\left(3\sin\alpha - \sin(3\alpha)\right)$$

Beweis Additionstheoreme :

↳ geometrisch → Übung!

↳ komplexe Zahlen / komplexe e-Funktion