

## 1 Algebra und (Un-)Gleichungen - Vertiefung

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke bzw. bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a)  $\sqrt[24]{x^{3^3} / (x^{3^2}(x^3)^2)}$

d)  $\ln \sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}}$

b)  $\frac{1}{x} + \frac{2x}{x-2} - \frac{5}{x+3} - \frac{20}{x^2+x-6} - \frac{3}{x^2+3x}$

e)  $\sqrt{x+16} - \sqrt{x-12} = 2$

f)  $8x^2 - 14x = 9$

c)  $\frac{\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}}$

g)  $x^4 - \frac{7}{4}x^2 - \frac{9}{8} = 0$

h)  $|x+1| + |x+2| \leq 2$

i)  $\frac{x+2}{x^2-x-2} < -1$

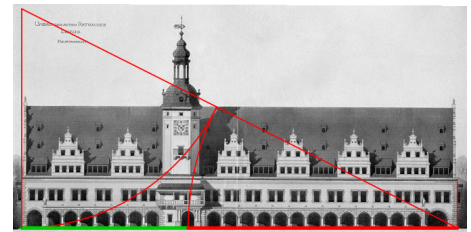
## 2 Allgemeinbildung: Goldener Schnitt

Der goldene Schnitt war schon in der Antike dem Euklid (300 v.Chr.) bekannt. Viele Bauten und Kunstwerke beruhen auf diesem „angenehmen“ Verhältnis zweier Seite.

Es soll eine Strecke  $\ell$  so in zwei ungleich große Teilintervalle  $a$  und  $b, a > b$  zerlegt werden, dass das Verhältnis von  $\ell$  zum größeren der beiden Intervalle gleich dem Verhältnis zwischen  $a$  und  $b$  ist.

Stellen Sie die zugehörige Gleichung auf und berechnen Sie  $\Phi = a/b$ .

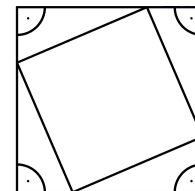
Anmerkung: Das Verhältnis  $\Phi$  taucht in vielen anderen Zusammenhängen in der Mathematik auf, so gilt auch  $\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$



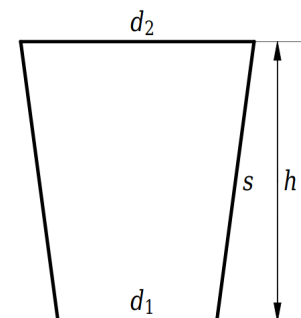
Altes Rathaus in Leipzig Quelle Wikipedia

## 3 Geometrie und Koordinaten

- a) Beweisen Sie mithilfe der Abbildung den Satz des Pythagoras. Berechnen Sie dazu die Gesamtfläche des äußeren Quadrats über zwei Wege und setzen Sie die Ergebnisse gleich.



- b) Der in der nebenstehenden Schnittzeichnung dargestellte Abfallbehälter habe die Form eines geraden Kegelstumpfes mit folgenden Maßen:  $d_1 = 17$  cm,  $d_2 = 25$  cm,  $h = 30$  cm. Wie groß ist das Fassungsvermögen in Litern? Wie groß ist die Mantelfläche in Quadratmetern? Wie hoch ist der Materialverbrauch in Quadratdezimetern?  
*Hinweis: das Kegelvolumen ist  $\frac{1}{3}G \cdot h_{\text{Kegel}}$ ,  $G$ -Grundfläche.*



- c) Geben Sie die Punkte  $(x, y, z)$  in Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$  an.

a)  $(1, 0, 0)$

c)  $(1, 1, 1)$

e)  $(2, 3, 4)$

b)  $(1, 1, 0)$

d)  $(1, \sqrt{2}, 0)$

f)  $(0, 0, 0)$

## 4 Einheiten

Ohne Taschenrechner.

- Wie setzt sich ein N (Newton) aus den SI-Basiseinheiten zusammen? Aus welchem Gesetz lässt sich die zusammengesetzte Einheit herleiten?
- Wie setzt sich ein J (Joule) aus den SI-Basiseinheiten zusammen? Aus welchem Gesetz ist dies ersichtlich?
- Nach dem Coulomb-Gesetz gilt für das elektrische Feld einer Punktladung  $q$  im Ursprung

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Welche Einheit besitzt das elektrische Feld?

*Hinweis:* Die Einheit des Ortsvektors  $\vec{r}$  ist die einer Länge. Die Einheit von  $\epsilon_0$  ist  $\frac{\text{As}}{\text{Vm}}$ , die Ladung ist Stromfluss·Zeit.

d) Rechnen Sie in  $\text{dm}^2$  um.

- |                          |   |
|--------------------------|---|
| a) $235 \text{ km}^2$    | d) $8,342 \cdot 10^4 \text{ mm} \cdot \text{m}$             |
| b) $0,287 \text{ m}^2$   | e) $3,648 \cdot 10^{17} \mu\text{m}^2$                      |
| c) $342748 \text{ mm}^2$ | f) $2 \mu\text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{dm}/\text{km}$ |

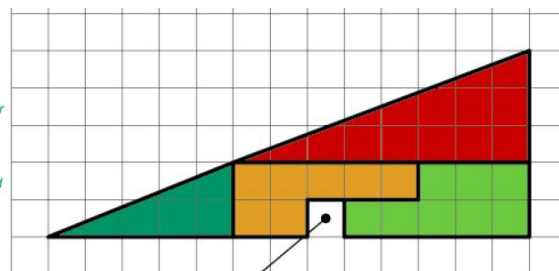
Rechnen Sie in  $\text{cm}^3$  um.

- |                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| a) $9,837 \cdot 10^{19} \text{ nm}^3$ | d) $2 \mu\text{m} \cdot \text{dm} \cdot \text{km}$                            |
| b) $5,32 \cdot 10^4 \text{ ml}$       | e) $4370 \text{ mm} \cdot 1/\text{cm}$  |
| c) $0,0345 \text{ m}^3$               | f) $0,45 \mu\text{m}^2/\text{dm} \cdot \text{km}^2/\text{nm} \cdot \text{cm}$ |

## 5 Wie kann das sein?



Below the four parts are moved around



The partitions are exactly the same, as those used above

From where comes this "hole"?

## 6 Für Freaks: Fibonacci-Folge

Die Folge  $(f_n)_{n=0,1,\dots} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$  der Fibonacci-Zahlen ist rekursiv definiert durch  $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  für  $n > 1$ , siehe auch <https://de.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-Folge>  
Zeige, dass:

a) Für  $n \geq 0$  gilt  $f_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$ .

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \Phi = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \approx 1.618$ , das  $\Phi$  des goldenen Schnittes. Es gilt auch  $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ .

Viel Spaß beim Lösen. ☺