3. Analysis

3.1 Funktionen

3.1.1 Definitionen und Eigenschaften

Eine Funktion ist eine Zuordnung, die jede Zahl x einer gegebenen Zahlenmenge D auf eine Zahl y einer Zahlenmenge W abbildet.

$$f: D \longrightarrow W$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

$f(x)$ Bild von x

x Urbild von $f(x)$

D: Definitionsbereich

W: Wertebereich

$f(D)$: Bildmenge

<u>Funktionsgleichung</u> (explizite Darstellung, Abbildungsvorschrift)

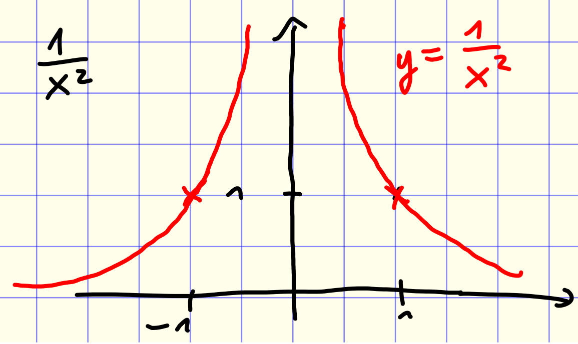
$y = f(x)$, <u>Bsp</u> $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$f(x)$ ist nicht definiert für $x = 0$ $\rightarrow$ Definitionslücke

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x^2}$$

<u>Graph einer Funktion</u>: Veranschaulichung der Funktion

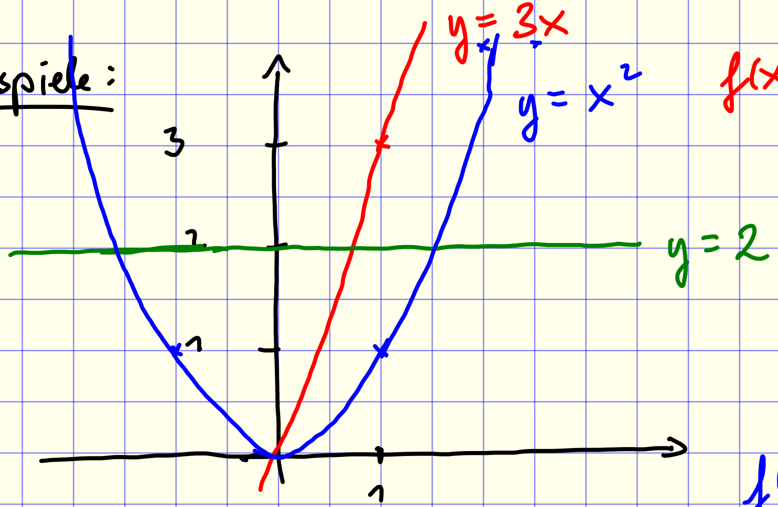
Zahlenpaare $(x,y) = (x, f(x))$ mit $x \in D$ als Punkte im Koordinatensystem <u>Bsp</u>: $f(x) = \frac{1}{x^2}$



Monotonie

$y = f(x)$ heißt
- monoton wachsend, falls $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- streng monoton wachsend, falls $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- monoton fallend, falls $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- streng monoton fallend, falls $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Beispiele:



$f(x) = 3x$ → streng wachsend

$f(x) = 2$ → monoton wachsend und fallend

$f(x) = x^2$

$f(x) = x^2$

- auf $D = \mathbb{R}$ keine Monotonie
- auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend
- auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend

Symmetrie

Der Graph einer Funktion $y = f(x)$ ist

- symmetrisch zur y-Achse, wenn gilt → Achsensymmetrie

  $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in D$ → gerade Funktion

- symmetrisch zum Ursprung, wenn gilt → Punktsymmetrie

  $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$ → ungerade Funktion

Bsp: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = f(x)$

$\rightarrow$ gerade Funktion

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$

$\rightarrow$ ungerade Funktion

Beschränktheit

Funktion ist nach unten / oben beschränkt, wenn $f(x)$ nicht kleiner / größer als eine bestimmte Zahl wird.

Dann existieren a oder b so, dass $a \leq f(x) \leq b$ für alle $x \in D$.

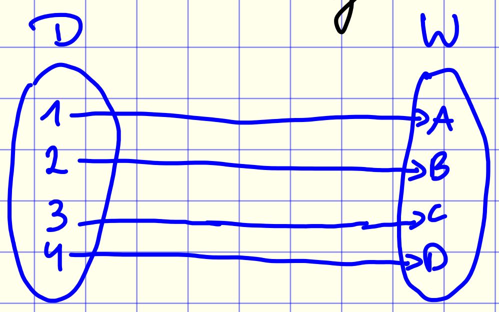
Bsp: $f(x) = x^2$ $\quad 0 \leq f(x)$

$f(x) = e^x$ $\quad 0 < f(x)$

Injektivität

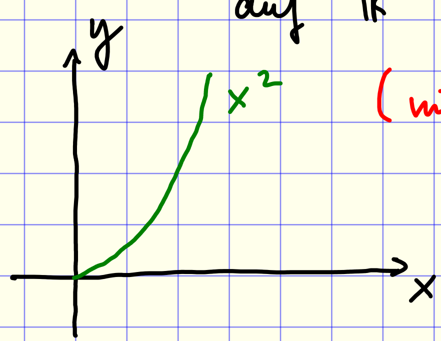
Zu jedem Element y der Zielmenge W gehört höchstens ein Element x der Definitionsmenge.

(Eventuell auch gar kein Element)

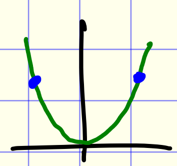


Bsp: $f(x) = x^2$

auf $\mathbb{R}^+$



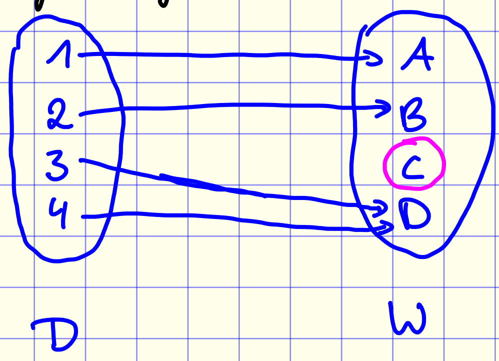
(nicht aber auf $\mathbb{R}$)



$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Surjektivität

jedes Element der Zielmenge W hat mindestens ein zugehöriges Element aus der Definitionsmenge D

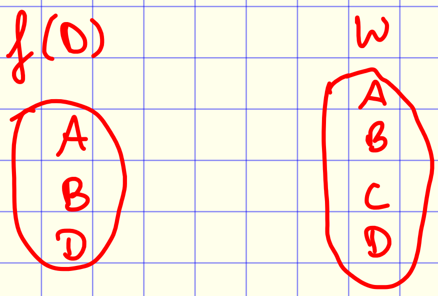


Achtung:

Zielmenge W $\neq$ Bild $f(D)$

(nicht unbedingt)

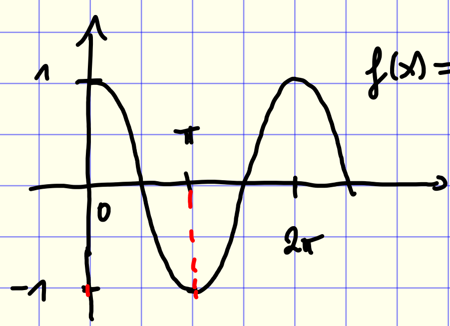
$f(D) \subset W$



Eine Funktion ist stets surjektiv als Abbildung in die Bildmenge als Zielmenge.

Merke: man kann Surjektivität durch Einschränkung des Wertebereiches (= Zielmenge), Injektivität durch Einschränkung des Definitionsbereiches erreichen.

<u>Bsp</u>: Surjektivität



$f(x) = \cos(x)$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ surjektiv

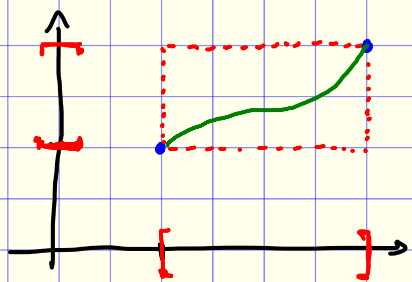
$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nicht surjektiv

$f: [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ injektiv

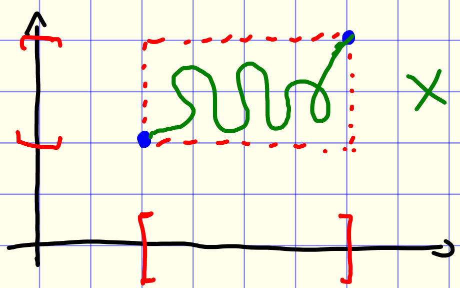
Bijektivität eine Funktion ist bijektiv, wenn sie surjektiv als auch injektiv ist.

Bsp:
$$f: [0,\pi] \longrightarrow [-1,1] \quad \text{ist bijektiv}$$
$$x \longmapsto \cos(x)$$

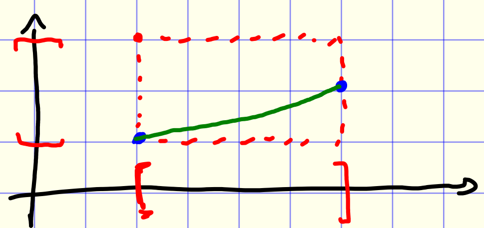
$$f: [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty) \quad \text{ist bijektiv}$$
$$x \longmapsto x^2$$



✓ bijektive Funktion



X keine Funktion



Verneinung
↓
injektiv und ¬ surjektiv
also auch nicht bijektiv

surjektiv und ¬ injektiv
also auch nicht bijektiv

Umkehrfunktion

durch Vertauschen von x und y einer bijektiven Funktion erhält man erneut eine solche.

für jedes x genau ein y $\rightarrow$ für jedes y genau ein x

Surjektivität Injektivität

Die Umkehrfunktion nennt man

$$f^{-1}(x) = y \qquad f^{-1}: W \rightarrow D$$

für bijektive Funktion $f: D \rightarrow W$

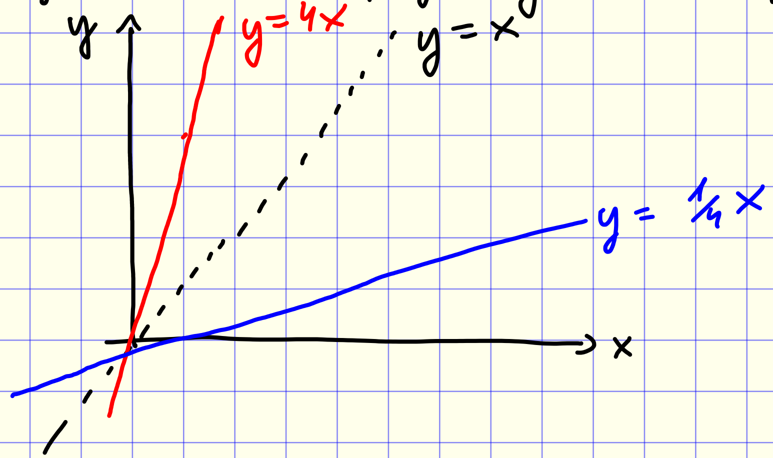
es gilt: $f^{-1}(f(x)) = x$

$f(f^{-1}(x)) = x$

Bsp: $y = f(x) = 4x \quad D = W = \mathbb{R} \rightarrow x = \frac{1}{4}y$

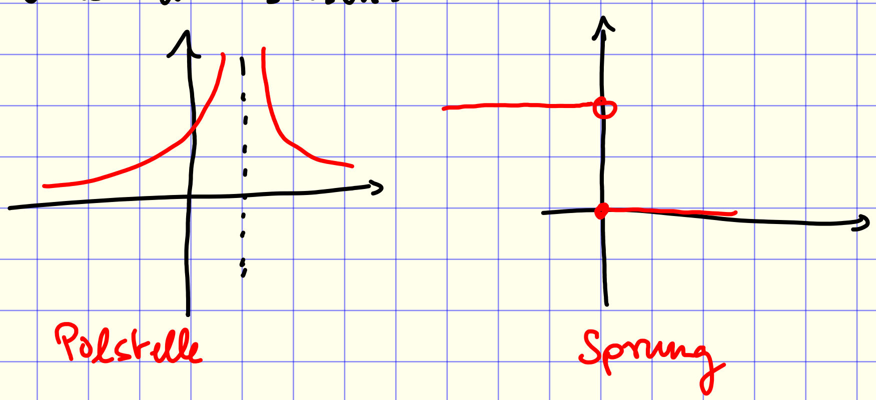
$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x \quad D = W = \mathbb{R}$

geometrisch: Spiegelung des Graphen an $y = x$



Stetigkeit

Anschaulich: Man kann den Graph der Funktion zeichnen ohne abzusetzen.



Genauere Definition mit Grenzwerten

eine Funktion f ist an der Stelle $x = a$ genau dann <u>stetig</u>, wenn gilt

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

von links $x < a$ von rechts $x > a$

insbesondere muss $f(a)$ auch existieren und endlich sein.

<u>Verknüpfung von Funktionen</u>

$$f + g : x \longmapsto f(x) + g(x)$$

$$f - g : x \longmapsto f(x) - g(x)$$

$$f \cdot g : x \longmapsto f(x) \cdot g(x)$$

$$f / g : x \longmapsto f(x) / g(x)$$

Verknüpfungen ändern Definitions- und Wertbereich

<u>Verkettung von Funktionen</u>

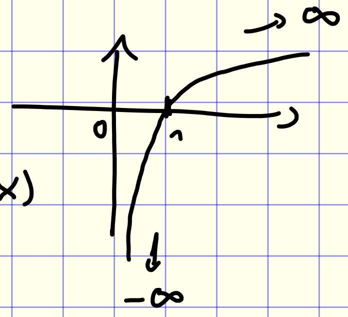
$$f \circ g : x \longmapsto (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$g : X \longrightarrow Y \qquad f : Y \longrightarrow Z$$
$$x \longmapsto y = g(x) \qquad y \longmapsto z = f(y)$$

$$f \circ g : X \longrightarrow Z$$
$$x \longmapsto f(g(x))$$

auch hier Änderung der Bereiche!

Reihenfolge bei Verkettung



__Bsp__: $f: (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \ln(x)$

$g: \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty) \qquad y \longmapsto e^{3y}$

$f(g(y)) = \ln(e^{3y}) = 3y$

$W(g) = D(f) = (0,\infty)$

$g(f(x)) = e^{3\ln(x)} = e^{\ln(x^3)} = x^3$

$W(f) = D(g) = \mathbb{R}$

3.1.2 Elementare Funktionen

algebraische Funktionen

transzendente Funktionen

e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$

rationale Funktionen

irrationale Funktionen

echt

unecht

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$

ganze rationale Funktionen

gebrochene rationale Funktionen

$\frac{x}{x+1}$

...

lineare Funktionen

$f(x) = 2 + x$

quadratische Funktionen

$f(x) = 1 + 2x + x^2$

konstante Funktionen

$f(x) = 2$