3.1.4 Gebrochene rationale Funktionen

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{p_m(x)} \qquad p_n, p_m: \text{ Polynome}$$

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} a_j x^j}$$

$n = m = 1$ gebrochene lineare Funktion $\frac{a_1 x + a_0}{b_1 x + b_0}$

Je nach Grad von Zähler- und Nennerpolynom unterscheidet man

$n < m$: echt gebrochene rationale Funktion

$n \geq m$: unecht gebrochene rationale Funktion

Polynomdivision

jede unecht gebrochene rationale Funktion $y = f(x)$ lässt sich als Summe einer ganzen rationalen Funktion $g(x)$ und einer echt gebrochenen rationalen Funktion $h(x)$ darstellen.

$$y = f(x) = g(x) + h(x)$$

Bsp: $\frac{2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 1}$

$$
\begin{array}{l}
(2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 4x + 1) : (x^2 - 3x + 1) = 2x^2 + 9x + 30 + \dfrac{77x - 29}{x^2 - 3x + 1} \\
-(2x^4 - 6x^3 + 2x^2) \\
\quad 9x^3 + 3x^2 - 4x \\
\quad -(9x^3 - 27x^2 + 9x) \\
\qquad 30x^2 - 13x + 1 \\
\qquad -(30x^2 - 90x + 30) \\
\qquad\quad 77x - 29
\end{array}
$$

$$\frac{2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 1} = 2x^2 + 9x + 30 + \frac{77x - 29}{x^2 - 3x + 1}$$

Eigenschaften von gebrochenen rationalen Funktionen

$$y = f(x) = \frac{P_n(x)}{P_m(x)} \equiv \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- x_0 ist Nullstelle von $y = f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, wenn $P(x_0) = 0$ und $Q(x_0) \neq 0$
- x_p ist Pol von $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, wenn $Q(x_p) = 0$ und $P(x_p) \neq 0$.

Ist x_p eine k-fache Nullstelle von $Q(x_p)$ und gilt $P(x_p) \neq 0$, dann heißt x_p Pol k-ter Ordnung von $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Linearfaktorzerlegung

komplexe Zahlen

ein Polynom $p_n(x)$ lässt sich in $\mathbb{C}$ komplett in Linearfaktoren zerlegen

$$p_n(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

falls k Nullstellen gleich sind, dann kann man diese in der Linearfaktorzerlegung zusammenfassen. $p_n(x) = (x - x_1) \cdot \underbrace{(x - x_2)^k}_{} \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$ x_2 k-fache Nullstelle

Bsp: $x^2 + 2x + 1$

$= (x+1) \cdot (x+1) = (x+1)^2$ 2-fache Nullstelle

$x^2 - 1$

$= (x+1)(x-1)$ zwei 1-fache Nullstellen

$\dfrac{1}{x^2 + 2x + 1} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ 2-fache Polstelle

- teilerfremde Polynome $P(x)$ und $Q(x)$, wenn alle Nullstellen verschieden sind

$x = x_1 \rightarrow P(x_1) = 0$ und $Q(x_1) \neq 0$

$x = x_2 \rightarrow P(x_2) \neq 0$ und $Q(x_2) = 0$

dann ist $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ Normalform der gebrochenen rationalen Funktion mit den Nullstellen des ZP $P(x)$ und Polen des NP $Q(x)$.

Denn Falls x_0 existiert mit $P(x_0) = Q(x_0) = 0$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x - p_1)(x - p_2) \cdots \cancel{(x - x_0)}}{(x - q_1)(x - q_2) \cdots \cancel{(x - x_0)}}$$

hier lässt sich der Linearfaktor kürzen, also nicht teilerfremd

Bsp: $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$

Nullstellenformen / Linearfaktorzerlegung

Zähler $\longrightarrow$ $(x+1)(x-1)$

Nenner $\longrightarrow$ $(x+1)\,(x+1)$

$$\frac{x^2-1}{x^2+2x+1} = \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$$

- Asymptoten einer gebrochenen rationalen Funktion:

  Geraden, denen sich der Funktionsgraph im Grenzwertverhalten nähert

  z.B. Polstellen, $y=0$ $\left(e^{-x}, \frac{1}{x}\right)$

Asymptotenfunktionen: Funktionen denen sich Funktionen nähern

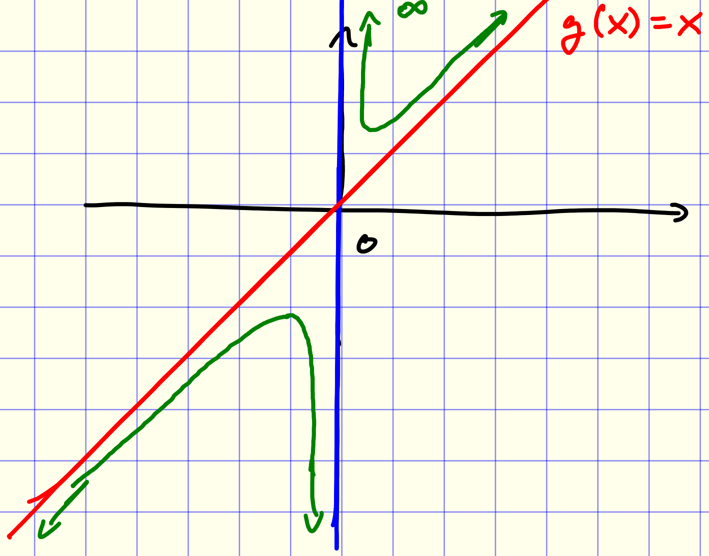
z.B. $x + \frac{1}{x} = f(x)$ Polstelle: $x=0$

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{x} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} x$$

Bsp: $x = 1000$

$$f(1000) = 1000 + \frac{1}{1000}$$
$$= 1000{,}001 \approx 1000$$

$\rightarrow$ Die Funktion $f(x)$ nähert sich für $x\to\infty$ der Funktion $g(x) = x$ an.



$\frac{1}{x} + x$

gebrochene rationale Funktionen $\quad x \to \infty \qquad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_n(x)}{P_m(x)}$

$n < m$: x-Achse als Asymptote

Bsp: $\quad \frac{x^2+3x+1}{2x^3-2x^2+x-4} \underset{x \neq 0}{=} \frac{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}}$

(Alle Brüche $\frac{1}{x}, \frac{3}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{2}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{4}{x^3} \to 0$)

aber für $x \to \infty$, also $x > 0$

Zähler $\to 0$, Nenner $\to 2$

$n = m$: zur x-Achse parallele Gerade $y = \frac{a_n}{b_m} = \frac{a_n}{b_n}$ ist Asymptote

Grund: $\quad \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_n x^n + \dots + b_0} \underset{x \neq 0}{=} \frac{a_n + \dots + \frac{a_k}{x^{n-k}} + \dots}{b_n + \dots + \frac{b_k}{x^{n-k}} + \dots}$

(mit $\frac{a_k}{x^{n-k}} \to 0$, $\frac{b_k}{x^{n-k}} \to 0$)

$n > m$: so gilt: $y = f(x) = g(x) + h(x)$

g(x): ganze rationale $\qquad$ h(x): echt gebr. rat.

$h(x)$ verhält sich wie $n < m$: $h(x) \to 0$

$\Rightarrow$ $g(x)$ ist Asymptotenfunktion von $f(x)$

„$g(x)$ ist Näherung von $f(x)$ für $x \to \infty$ / $x \gg 1$"

Rest: $h(x) \longrightarrow 0$ für $x \to \infty$

Analogie: $\frac{7}{2} = 3{,}5 = 3 + 0{,}5$

„$g(x)$" „$h(x)$"

$\frac{7}{2} \;\hat{=}\; n > m \longrightarrow 3 + 0{,}5 = 3 + \frac{1}{2}$

„unecht"

$\frac{1}{2} \;\hat{=}\; n < m$ „echt"

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow h(x) < 0$$

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow h(x) > 0$$

Partialbruchzerlegung

- Zerlegung einer gebrochenen rationalen Funktion in eine Summe von „Brüchen"

  Partialbrüche: möglichst nur noch (lineares) Polynom im Nenner

- jede echt gebrochen rationale Funktion ($n < m$) kann eindeutig in eine Summe von Partialbrüchen zerlegt werden.

$$y = f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

Ziel: auf diese Form bringen:

$$f(x) = \frac{A_1}{(x - x_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(x - x_2)^{k_2}} + \dots + \frac{A_q}{(x - x_q)^{k_q}}$$

$$+ \frac{A_1}{(x - x_1)^{k_1 - 1}} \dots$$

mit x_i Nullstellen $i = 1, \ldots, q$ der Vielfachheit k_i

Vorgehen

1) für $n > m$: Abspalten des ganzrationalen Anteils mittels Polynomdivision ($h(x)$ PBZ)

2) Kürzen des Bruches durch den Koeffizienten b_m der höchsten Nennerpotenz

$$f(x) = \frac{c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + c_0}{x^m + d_{m-1} x^{m-1} + \ldots\ldots + d_0}$$

$$c_n = \frac{a_n}{b_m}, \quad c_i = \frac{a_i}{b_m}, \quad d_i = \frac{b_i}{b_m}$$

3) Bestimmung der Nullstellen des Nennerpolynoms $(x_1, x_2, \ldots, x_r, \; r \le m)$

4) Zerlegung des Nennerpolynoms in Form:

Nullstellenform

$$x^m + d_{m-1} x^{m-1} + \ldots\ldots + d_0 = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \, (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \\ \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s} \end{array}\right.$$

Terme die sich auf $\mathbb{R}$ nicht weiter zerlegen lassen

(alternativ: $(x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \ldots\ldots \cdot (x - x_r)^{k_r}$ in $\mathbb{C}$)

5) Zerlegung von $f(x)$ in eine Summe von Brüchen

$$f(x) = \frac{A_{11}}{(x-x_1)} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} \quad \leftarrow x_1 \text{ VFH } k_1$$

$$+ \frac{A_{21}}{(x-x_2)} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} \quad \leftarrow x_2 \text{ VFH } k_2$$

$+ \dots$ ← weitere Nullstellen mit linearem Term

$$\left.\begin{aligned} &+ \frac{B_{11} + C_{11}x}{x^2 + p_1x + q_1x} + \frac{B_{12} + C_{12}x}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} \\ &+ \dots + \frac{B_{1l_1} + C_{1l_1}x}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} \end{aligned}\right\} \text{in } \mathbb{R} \text{ nicht zerlegbare Terme}$$

$+ \dots$

6) Koeffizienten A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} mittels Koeffizientenvergleich

<u>Bsp</u>: $$f(x) = \frac{6x^2 - 4}{2x^3 + 4x^2 + 4x + 2}$$ $m > n$? ja ✓

$b_m = 2$

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$$

Nullstellen des Nennerpolynoms: $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$

$x_1 = -1 \rightarrow$ Polynomdivision

$$\rightarrow x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x+1)\underbrace{(x^2+x+1)}_{\text{in } \mathbb{R} \text{ keine LFZ}}$$

lineares Polynom

$$\frac{3x^2-2}{x^3+2x^2+2x+1} \overset{!}{=} \underbrace{\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}}$$

$$= \frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x^2+x+1)(x+1)}$$

$=$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 - 2 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

$$3x^2 - 2 = (A+B)x^2 + (A+B+C)\,x + A+C$$

$A+B \overset{!}{=} 3 \qquad A+B+C \overset{!}{=} 0 \qquad A+C \overset{!}{=} -2$

$$\Rightarrow \quad A = 1, \quad B = 2, \quad C = -3$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{2x-3}{x^2+x+1}$$