5. Lineare Algebra

5.1 Vektoren

Definition: Vektor

Ein Vektor ist ein Element eines Vektorraums.
In einem zu einem K Vektorraum K^n gehörigen n-dimensionalen Koordinatensystem kann ein Vektor durch n Komponenten dargestellt werden, die in einer Spalte oder Zeile aufgelistet werden.

K: Körper z.B. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

Spaltenvektor — Zeilenvektor

Jedem Vektor kann ein Punkt im Raum eindeutig zugeordnet werden. Zu diesem Punkt ist der Vektor der Ortsvektor.

$$\vec{a} \rightarrow A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

$\leftrightarrow$ Richtungsvektoren (Relativvektoren)

verbinden Punkte im Raum.
Jeder Relativvektor im $\mathbb{R}^3$ ist auch Ortsvektor.

<u>Definition</u>: Der zu $\vec{a}$ <u>transponierte</u> Vektor $\vec{a}^T$ ist gegeben durch

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \Rightarrow \vec{a}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

somit gilt: $(\vec{a}^T)^T = \vec{a}$

<u>Vektorrechenregeln</u>

$(\vec{a} + \vec{b})_i = a_i + b_i$ $\qquad$ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ erneut ein Vektor!

Addition komponentenweise

$(\alpha \vec{a})_i = \alpha a_i$ $\qquad$ $\alpha \vec{a} = \vec{b}$ erneut ein Vektor

Multiplikation mit Skalar komponentenweise

"
Zahl

Im $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{C}^3$ definiert man außerdem

<u>Kreuzprodukt</u> $\vec{a} \times \vec{b}$

<u>Spatprodukt</u> $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

<u>Skalarprodukt</u> $\vec{a} \cdot \vec{b}$

5.2 Spezielle Produkte von Vektoren

A: Das Skalarprodukt

<u>Definition</u> für $\vec{a} \in K^n$, $\vec{b} \in K^n$ ist

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in K$$

als Element von K ein Skalar.

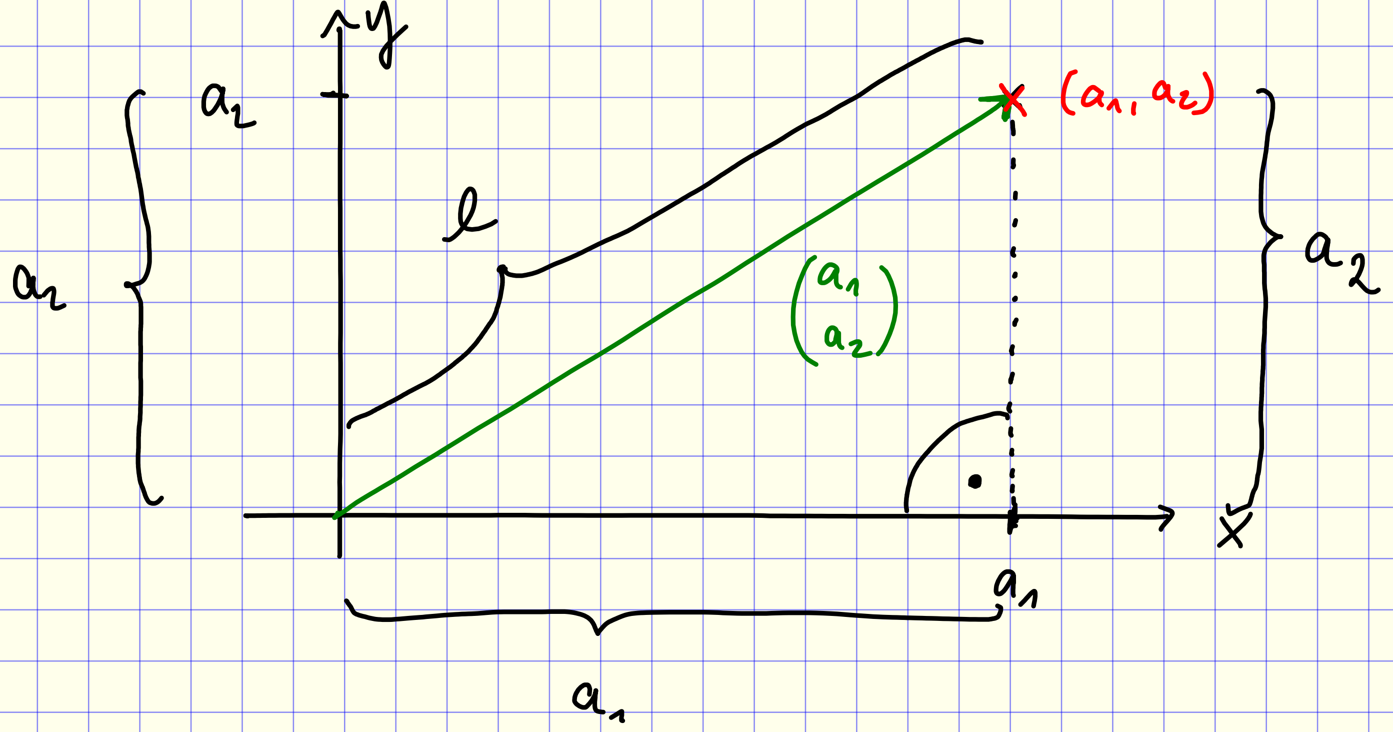
Daher nennt man dies das <u>Skalarprodukt</u>.

<u>Spezialfall</u>: $\vec{a} \cdot \vec{a} = \sum_i a_i a_i = \sum_i a_i^2$

über das S-Produkt mit sich selbst definieren wir eine Metrik → Betrag

$$|\vec{a}| \equiv \sqrt{\sum_i a_i^2} \geq 0 \quad \text{für } a \in \mathbb{R}^n$$

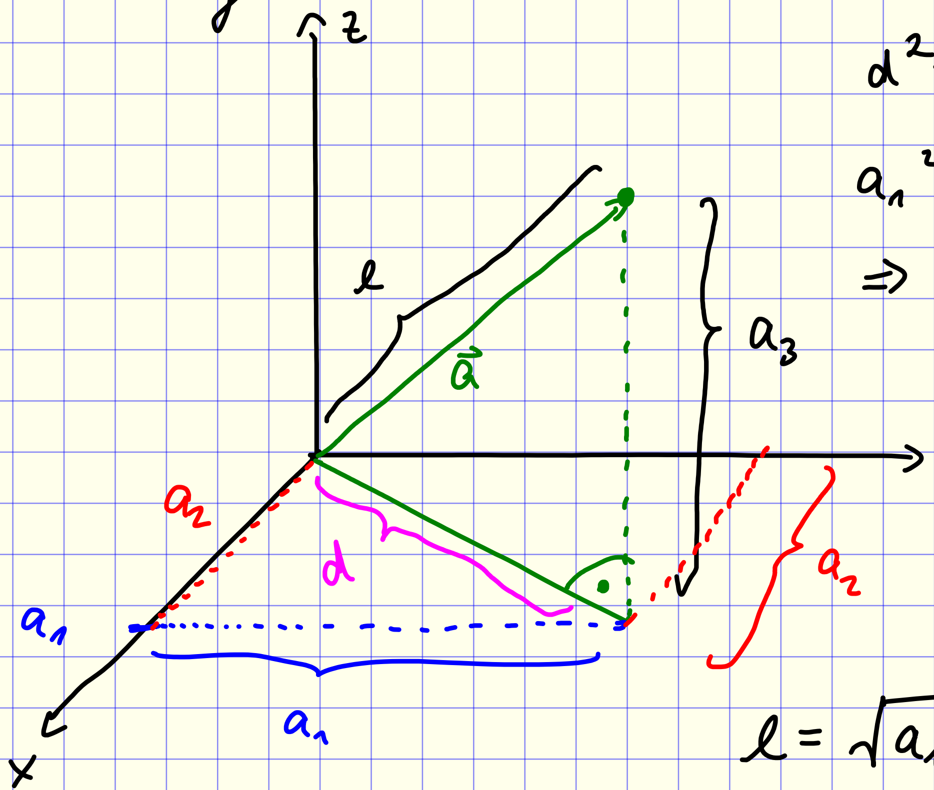
↳ euklidische Norm



Satz des Pythagoras: $\ell^2 = a_1^2 + a_2^2$

$$\Rightarrow \ell = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{\sum_i a_i^2}$$

Die euklidische Norm entspricht anschaulich der Länge des Vektors.



$d^2 + a_3^2 = \ell^2$

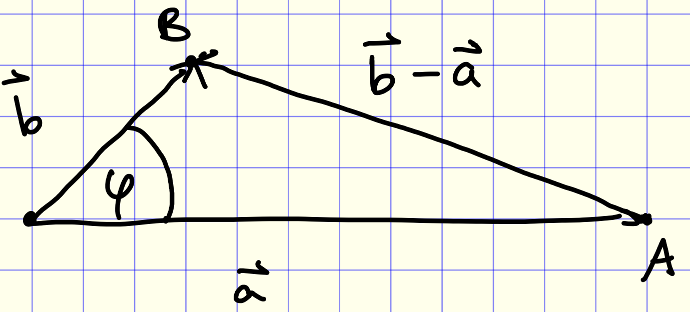
$a_1^2 + a_2^2 = d^2$

$\Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \ell^2$

$$\ell = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\sum_i a_i^2} = |\vec{a}|$$

Geometrische Bedeutung des allgemeinen Skalarprodukts

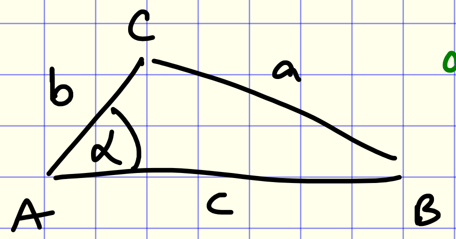
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}-\vec{a}$ bilden ein beliebiges Dreieck



In diesem Dreieck gilt der Kosinussatz

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\varphi)$$

[



allgemein für beliebiges Dreieck

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

]

Berechne $|\vec{b}-\vec{a}|^2 = (\vec{b}-\vec{a})^2 = (\vec{b}-\vec{a})(\vec{b}-\vec{a})$

Distributivgesetz Skalarprodukt

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = a_1(b_1+c_1) + a_2(b_2+c_2) + a_3(b_3+c_3)$$

$$= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + a_3b_3 + a_3c_3$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots$$

$$\ldots + \underline{a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3}$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}}$$

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = (\vec{b}-\vec{a})(\vec{b}-\vec{a})$$

$$= \vec{b}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{a}^2$$

Kosinussatz: $\vec{b}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{a}^2 = \overbrace{|\vec{b}|^2}^{\vec{b}^2} + \overbrace{|\vec{a}|^2}^{\vec{a}^2} - 2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$

$$\cancel{\vec{b}^2} - 2\vec{a}\vec{b} + \cancel{\vec{a}^2} = \cancel{\vec{b}^2} + \cancel{\vec{a}^2} - 2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}}$$

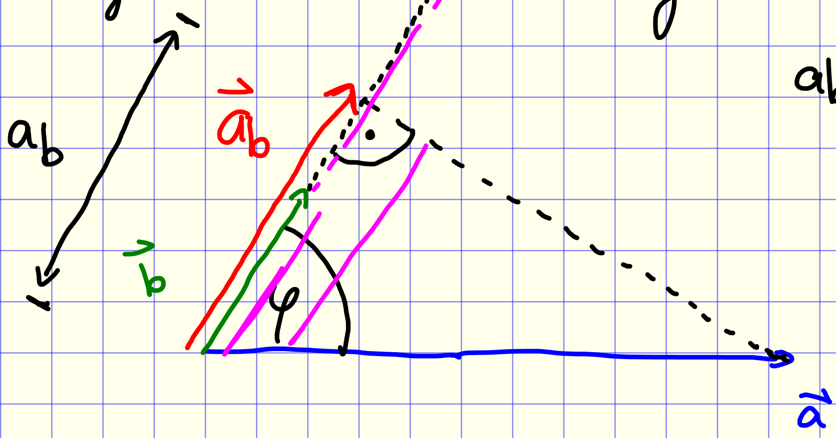
<u>Winkelformel</u>

Sei $\varphi = \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ der Winkel zwischen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Dann gilt $\quad \cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

Achtung: Taschenrechner liefert auch Gegenwinkel!

↳ geometrische Bedeutung des Skalarprodukts



a_b: Komponente von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$

$|\vec{a}|$: Hypotenuse

$$\frac{a_b}{|\vec{a}|} = \cos(\varphi) \quad \text{aus Dreieck} \quad (1)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \quad \text{aus Winkelformel} \quad (2)$$

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow \frac{a_b}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Rightarrow a_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$a_b = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \vec{a}$$

Das Skalarprodukt ist eine Projektion des einen Vektors auf den anderen.

$$\underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \, a_b}$$

Der Vektor $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ ist <u>normiert</u>. Ein normierter Vektor hat die Länge 1.

$$\left|\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right| = \sqrt{\frac{\vec{b}^2}{|\vec{b}|^2}} = \sqrt{\frac{|\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2}} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}|} = 1$$

Projektion in Richtung eines Vektors

$$\vec a_b := \underbrace{\frac{\vec b}{|\vec b|}}_{\text{Richtung}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\vec a \cdot \vec b}{|\vec b|}\right)}_{\text{Komponente } a_b = |\vec a_b|}$$

Eigenschaften des Skalarprodukts

- $\vec a \parallel \vec b \ \wedge \ \varphi = 0° \Rightarrow \vec a \cdot \vec b = a \cdot b = |\vec a| |\vec b|$
- $\vec a \parallel \vec b \ \wedge \ \varphi = 180° \Rightarrow \vec a \cdot \vec b = -\, a \cdot b$
- $\vec a \perp \vec b \Rightarrow \varphi \in \{90°, 270°\} \Rightarrow \vec a \cdot \vec b = 0$

  ↳ Test auf $\perp$

- $\sphericalangle(\vec a, \vec b) < 90° \Rightarrow \vec a \cdot \vec b > 0$
- $\sphericalangle(\vec a, \vec b) > 90° \Rightarrow \vec a \cdot \vec b < 0$
- $\vec a \cdot \vec a = \vec a^{\,2} = |\vec a|^2$, $|\vec a|$ Norm / Länge
- $\vec a \cdot (\vec b + \vec c) = \vec a \cdot \vec b + \vec a \cdot \vec c$

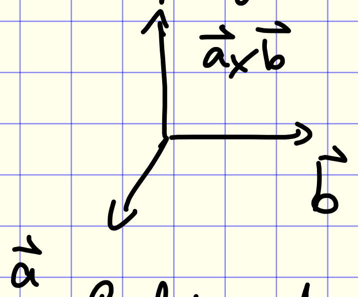
B: Kreuzprodukt / Vektorprodukt

Definition: Das KP zweier Vektoren $\vec a, \vec b \in \mathbb{R}^3$ (oder $\mathbb{C}^3$) ist gegeben durch

$$\vec a \times \vec b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

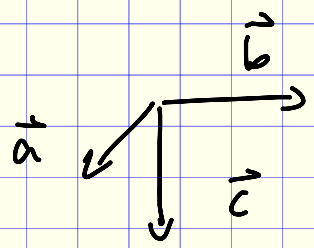
geometrische Bedeutung

1. $(\vec{a}\times\vec{b}) \perp \vec{a}, \vec{b}$ Beweis: Übung durch Skalarprod.
2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}$ bilden ein Rechtssystem in dieser Reihenfolge



Rechtssystem

„rechtshändig"

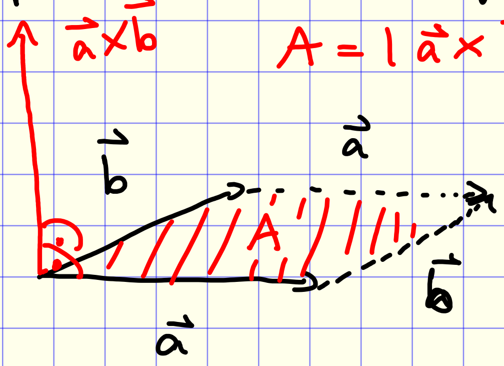


„linkshändig"

Bsp: $\vec{a}, \vec{a}\times\vec{b}, \vec{b}$

3. $|\vec{a}\times\vec{b}|$ ist der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelograms.

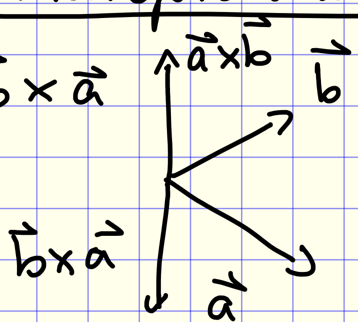
$A = |\vec{a}\times\vec{b}|$



Eigenschaften des Kreuzproduktes

- $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

keine Kommutativität!



- $\vec{a}\times(\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}) = \alpha(\vec{a}\times\vec{b}) + \beta(\vec{a}\times\vec{c})$
- $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$ BAC − CAB −

Regel

- $(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})$
  $= (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{b}\vec{c})(\vec{a}\vec{d})$ Lagrange-Identität

- $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$
  $= 0$ Jacobi-Identität

Beweis: Übung

C Spatprodukt

Für $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet man $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \in \mathbb{R}$ als das Spatprodukt. Der Betrag $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$ ist das Volumen des von $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ aufgespannten Spats.

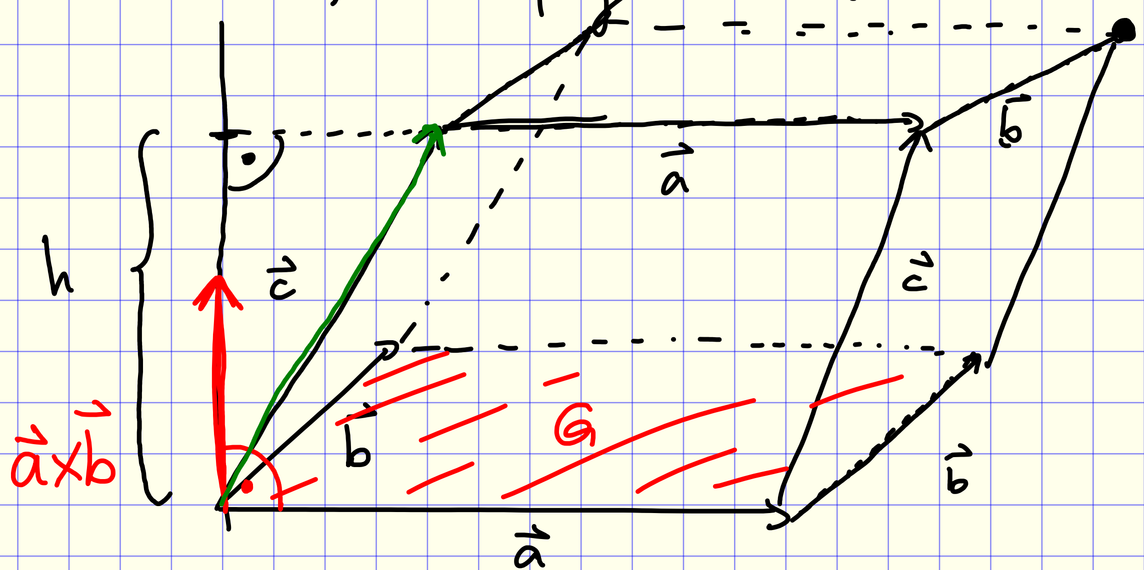
Eigenschaften

- Invarianz bezüglich zyklischer Vertauschung

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$$

$$\neq (\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}$$

- $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} > 0$, falls $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ rechtshändig



$$C_{\vec{a}\times\vec{b}} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}\cdot\vec{c} \qquad V_{Spat} = G\cdot h$$

$$G \leftarrow |\vec{a}\times\vec{b}|$$

$$\Rightarrow V_{Spat} = \cancel{|\vec{a}\times\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\cancel{|\vec{a}\times\vec{b}|}}\cdot\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$$

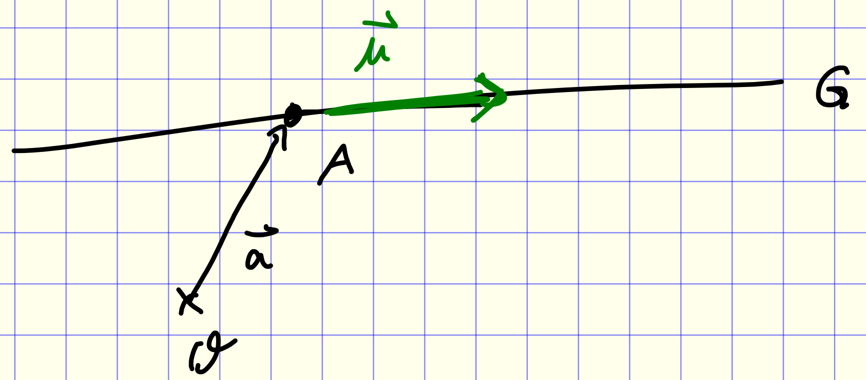
5.3 Geraden und Ebenen

A Geradengleichungen

Richtungsvektor

$$\vec{x}\in G \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{a} + \alpha\cdot\vec{u}$$

Ortsvektor des Aufpunkts



Schnitte von Geraden

Geraden g, h und Schnittmenge S

$\mathbb{R}^2$: (1) $g \neq h$, g, h parallel $\Rightarrow S = \{\ \}$

(2) $g = h \Rightarrow S = g = h$

(3) eindeutige Lösung $\Rightarrow S = \{\vec{s}\}$

$\mathbb{R}^3$: ①, ②, ③ analog

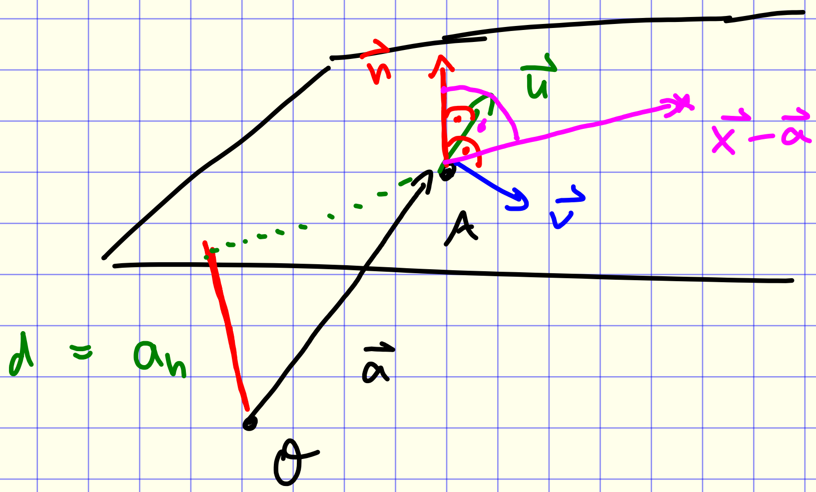
④ windschief: g, h nicht parallel
aber in parallelen Ebenen

B Ebenengleichungen

Parameterform: $\vec{x} \in E \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{a} + \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$

$\vec{u} \neq \lambda \vec{v}$

$\vec{u} \not\parallel \vec{v}$



Normalenform: $\vec{n} = \dfrac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$

$\vec{x} \in E \Leftrightarrow (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$

der Relativvektor ist senkrecht zu $\vec{n}$

↳ **Hessesche Normalenform**

$\vec{x}\,\vec{n} = \vec{a}\,\vec{n} = d$ d: Abstand zum Ursprung (falls $|\vec{n}| = 1$)

↳ **Koordinatenform**

$\vec{x} \cdot \vec{n} = d \Rightarrow x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 = d$

Hessesche Normalenform in Parameterform

1. Finde einen Punkt, der $\vec{x}\vec{n} = d$ erfüllt

bspw: $x_i = 0$ außer für ein i

$$\cancel{x_1 n_1} + x_2 n_2 + \cancel{x_3 n_3} = d$$

$x_1 = 0$ $\quad$ $x_3 = 0$ $\quad$ $x_2 = \frac{d}{n_2}$

$$\rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ d/n_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Finde einen zweiten Punkt

$\rightarrow$ Differenz zw. Punkten liefert Richtungsvektor $\vec{u}$

3. Richtungsvektor $\vec{v}$

$\swarrow$ dritter Punkt $\qquad$ $\searrow$ $\vec{v} := \vec{u} \times \vec{n}$

<u>Beispiel</u>: Ebenenschnitt

$E_1: \quad -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$

$E_2: \quad x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7$

$E_2 - E_1 \cdot 3: \quad 4x_1 - 2x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 2x_1 - 2$

in E_1: $\quad x_3 = 5 - 3x_1$

$$x \in S \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 - 2 \\ 5 - 3x_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \overset{\equiv t}{x_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\rightarrow \text{ Gerade}}$$