11.10.23

## 5.4. Lineare Abbildungen

Definition: Eine Abbildung $f: V \to V'$ zwischen

$K$- Vektorräumen $V, V'$ heißt lineare Abbildung, falls gilt

$$\text{(i)} \quad f(a+b) = f(a) + f(b) \quad \text{für } a, b \in V$$

$$\text{(ii)} \quad f(\alpha a) = \alpha f(a) \quad \text{für } a \in V, \ \alpha \in K$$

$V = K^n$

z.B. $K = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3, \mathbb{C}^{16}$

(i) und (ii) lassen sich zusammenfassen zu

$$f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b) \qquad \alpha, \beta \in K, \ a, b \in V$$

Folgerung: Ist $f$ lineare Abbildung, so gilt

$f(0) = 0$ Beweis: $f(\underbrace{a-a}_{0 \in V}) = \underbrace{f(a) - f(a)}_{0 \in V'} = 0$

Beispiele: • $\mathbb{R}$ Ursprungsgerade $f(x) = a \cdot x$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

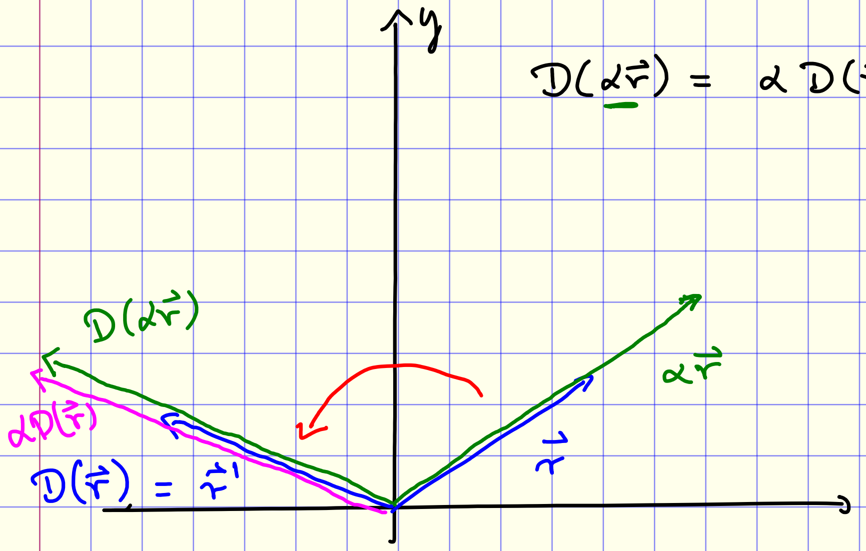
Achtung: lineare Funktion $\neq$ lineare Abbildung

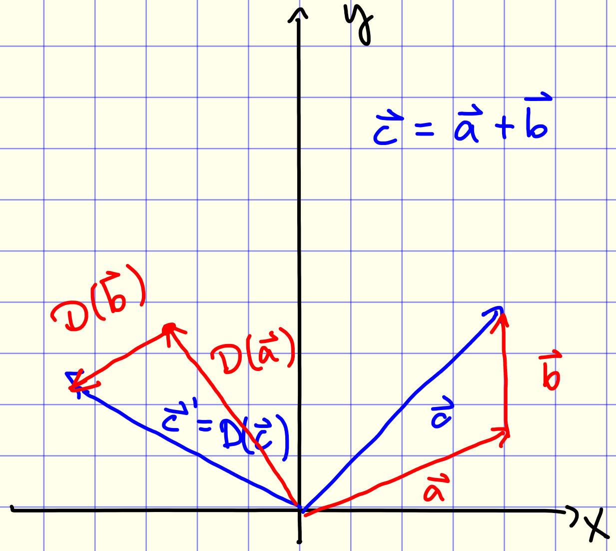
$f(x) = ax + b, \quad b \neq 0$

$$f(\alpha x) = \alpha a x + b \neq \alpha a x + \alpha b = \alpha(ax+b) = \alpha f(x)$$

• $\mathbb{R}^2$: Drehung um den Ursprung $D(\vec{r})$

$D(\underline{\alpha}\vec{r}) = \alpha D(\vec{r})$




$D(\vec{c}) = D(\vec{a}) + D(\vec{b})$

## Geometrische Interpretation

Streckung vor oder nach Drehung → gleiches Ergebnis

Bei Addition: egal, ob man Summanden dreht oder Summe

## 5.5 Matrizen

Es sei $K$ ein Körper (z.B. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Zu $m, n \in \mathbb{N}$

ist das System

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

eine Matrix.

$a_{ij}$ sind die Elemente der Matrix, auch <u>Matrixelemente</u>.

Vektoren sind Matrizen aus $\underbrace{\mathbb{R}^{1\times n}}_{\text{Zeilenvektor}}$ oder $\underbrace{\mathbb{R}^{n\times 1}}_{\text{Spaltenvektor}}$

# Rechenregeln für Matrizen

1. $A + B = C$ mit $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ für alle $i,j$

   Bedingung: Dimensionen gleich $A \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

   Addition geschieht <u>elementweise</u>.

2. $\alpha A = B$ mit $b_{ij} = \alpha\, a_{ij}$ für alle $i,j$

   Elementweise Multiplikation mit einem <u>Skalar</u>.

3. <u>Matrixmultiplikation</u>

   $A \cdot B = C$ mit $c_{ij} = \sum_k a_{ik}\, b_{kj}$

   nur möglich, falls $A \in \mathbb{R}^{m\times K}$, $B \in \mathbb{R}^{K\times n}$

   $\Rightarrow C \in \mathbb{R}^{m\times n}$

   Assoziativgesetz: $(A\cdot B)C = A(B\cdot C)$

   <u>Explizit: Matrixmultiplikation</u>

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}}_{A \in \mathbb{R}^{2\times 3}} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}}^{B \in \mathbb{R}^{3\times 3}}$$

$$= \begin{pmatrix} \overset{c_{11}}{a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}} & \overset{c_{12}}{a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}} & \overset{c_{13}}{a_{11}b_{13} + \dots} \\ \underset{c_{21}}{a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}} & \underset{c_{22}}{a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}} & \underset{c_{23}}{\dots} \end{pmatrix}$$

$A \quad B$

$$C \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

Faßt man die Elemente der Matrizen zu Zeilen- und Spaltenvektoren zusammen

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,T} \\ \vec{a}_2^{\,T} \end{pmatrix} \qquad B = \left( \vec{b}_1 , \vec{b}_2 , \vec{b}_3 \right)$$

$$\vec{a}_1^{\,T} = \left( a_{11} \; a_{12} \; a_{13} \right) \qquad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} \quad \text{usw.}$$

so stehen im Produkt die Skalarprodukte

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \vec{b}_2 & \vec{a}_1 \vec{b}_3 \\ \vec{a}_2 \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \vec{b}_2 & \vec{a}_2 \vec{b}_3 \\ \vec{a}_3 \vec{b}_1 & \vec{a}_3 \vec{b}_2 & \vec{a}_3 \vec{b}_3 \end{pmatrix}$$

außerdem: Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist das Matrixprodukt von Zeilen- und Spaltenvektor

$B \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \vec{a}^{\,T} \bullet \vec{b}$$

$A \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ Matrixprodukt

3 Spalten

$$\left( a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 \right) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = c_{11}$$

3 Zeilen

$$\in \mathbb{R}^{1\times 1} = \mathbb{R}$$

## Wirkung einer Matrix auf einen Vektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$$

$\cancel{\vec{r} \cdot A}$ $\qquad A \cdot \vec{r}$

$$A \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x x + a_y y + a_z z \\ b_x x + b_y y + b_z z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{a} \cdot \vec{r} \\ \vec{b} \cdot \vec{r} \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{r}$ wird auf die Zeilenvektoren projiziert!

Definition

Die Matrix $\mathbb{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist die Einheitsmatrix des $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

$\mathbb{1}\vec{x} = \vec{x}$ und $\mathbb{1} A = A \mathbb{1} = A$, $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

denn: $\vec{x}$ wird auf Basisvektoren / Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^{3\times 3}$ projiziert. $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Satz:

a) Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definiert mit $\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$ eine lineare Abbildung.

b) Jede lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ kann als Matrix dargestellt werden.

vorher: $\mathbb{R}^{1\times 3} = \mathbb{R}^{3\times 1} = \mathbb{R}^3$

Beispiele: Geometrische lineare Abbildungen im $\mathbb{R}^2$

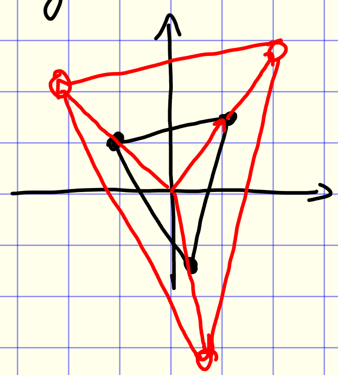
- Die Skalierung $A = \alpha \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

$$\vec{x} \longmapsto \alpha \vec{x}$$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 0y \\ 0x + 2y \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 2\vec{x}$$

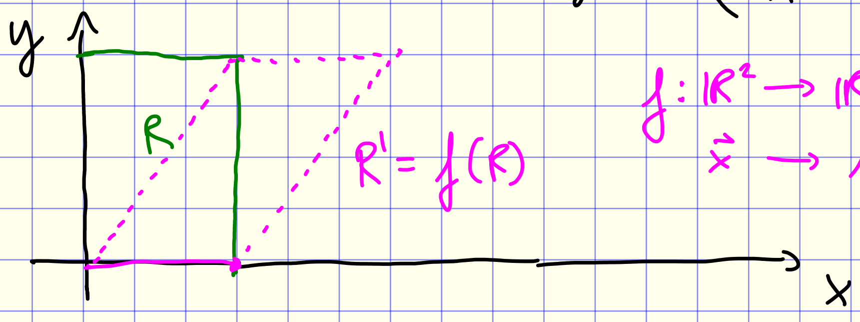
Der geometrische Körper wird um den Ursprung gestreckt.



- Scherung $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in $x$-Rtg

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ in $y$-Rtg

x-Rtg: $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ay \\ 0x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ay \\ y \end{pmatrix}$




$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\vec{x} \to A\vec{x}$

anderes Beispiel: Rotation

$$D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

## 5.5 Lineare Gleichungssysteme

__Definition__ : Für $a_{ij} \in K$ und $b_i \in K$, wobei $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$, nennt man das System

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

ein __lineares Gleichungssystem__ mit __Koeffizienten__ $a_{ij}$ und den __Unbekannten__ $x_1, \dots, x_n$

__Bsp__:
$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &= 0 \\
3x_1 - x_2 &= 4
\end{aligned}
$$

Mithilfe der Matrixmultiplikation läßt sich das System schreiben als $A\vec{x} = \vec{b}$.

$$\underset{\uparrow}{A}$$

__Koeffizientenmatrix__

__Äquivalenzumformungen__

Das Gleichungssystem ist immernoch vollständig und „korrekt", wenn man Vielfache von Gleichungen addiert.

d.h. Gegeben das LGS

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & \\ (m) & a_{m1}x_1 + \dots \dots + a_{mn}x_n = b_m\end{array}\right\} A\vec{x} = \vec{b}$$

<u>Bsp</u> ersetze (1) durch $\alpha(1) + \beta(m) \to$ neues LGS

$$\begin{array}{ll}(1) & \underbrace{(\alpha a_{11} + \beta a_{m1})}_{a_{11}'}x_1 + \dots + \underbrace{(\alpha a_{1n} + \beta a_{mn})}_{a_{1n}'}x_n = \underbrace{\alpha b_1 + \beta b_m}_{b_1'} \\ (2) & a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ (m) & a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m\end{array}$$

LGS': $\vec{A}'\vec{x} = \vec{b}'$

## <u>Lösungsverfahren zu LGSen</u>

Wir schreiben $A\vec{x} = \vec{b}$ in <u>eine</u> Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m\end{array}\right) = (A \mid \vec{b})$$

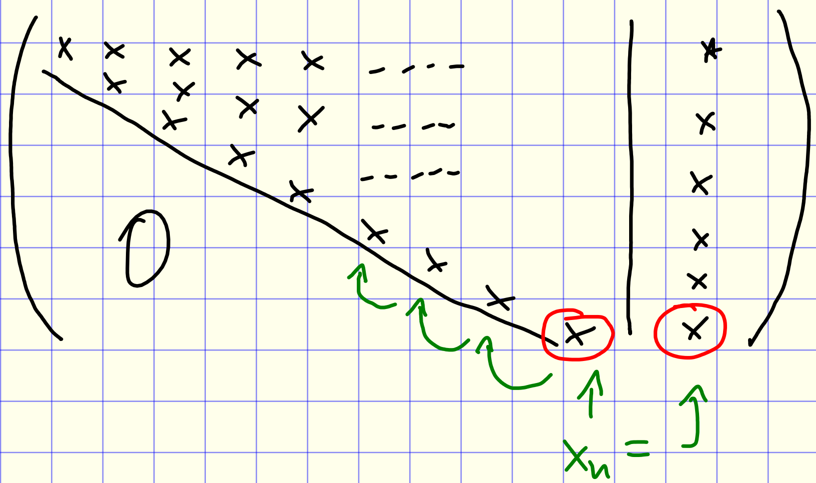
mit $A = \begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_1 \\ \vdots \\ b_m\end{pmatrix}$

Idee: A auf Dreiecksform bringen

Schritt 1: subtrahiere von allen Zeilen die erste Zeile multipliziert mit $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, erste Zeile bleibt stehen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} & \cdots & a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1n} & b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{Untermatrix}} & & & \end{array}\right)$$

Weitere Schritte: Gleiche Operation auf Untermatrizen anwenden. → Dreiecksform




Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 - 1x_3 &= 1 \\ 1x_1 - 1x_2 - 1x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$
(A|\vec{b}) = \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ 2\mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2-1 & -2+1 & 6-1 \\ 0 & 2-1 & 1+1 & 1-1 \end{array}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II}+3\mathrm{III} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)
$$

Änderung von

$$
\rightsquigarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) :5 \rightsquigarrow \begin{array}{c|ccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \mathrm{I} & 2 & 1 & -1 & 1 \\ \mathrm{II} & 0 & 1 & 2 & 0 \\ \mathrm{III} & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}
$$

$$\Rightarrow x_3 = 1$$

$\mathrm{II}$ $\quad x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$

$\mathrm{I}$ $\quad 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow 2x_1 - 2 - 1 = 1$

$$2x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Erweiterung: bringe Koeffizientenmatrix auf $\mathbb{1}$

Äquivalenzumformung

$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow A'\vec{x} = \vec{b}' \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow \mathbb{1}\vec{x} = \vec{b}'' \Rightarrow \vec{x} = \vec{b}''$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II}-2\mathrm{III} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow
\begin{array}{c}
I - II + III \\ II \\ III
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c}
2 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 1 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)
\rightsquigarrow
\begin{array}{c}
I/2 \\ II \\ III
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$