1 Grenzwerte und Stetigkeit

(i) Bestimmen Sie das Verhalten der folgenden Funktionen f mit $f(x) =$

a) $\dfrac{3}{x-1},\ x \to \infty$

b) $\dfrac{3}{(x-1)^2},\ x \to 1$

c) $\dfrac{2(x-2)}{x^2-4},\ x \to 2$

d) $\dfrac{2(x-2)}{x^2-4},\ x \to -2$

e) $\dfrac{(x-2)^3}{x^2+1},\ x \to \infty$

f) $\dfrac{x^2+1}{(x-2)^3},\ x \to \infty$

(ii) Überprüfen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und geben Sie im Fall von Unstetigkeiten die Grenzwerte an.

a) $f(x) = 2|x|$

b) $f(x) = |(x-1)^2|$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geqslant 0 \\ \sqrt{1-x}, & x < 0 \end{cases}$

f) $\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x \leqslant 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x^2+x-2}, & x \neq -2 \\ \dfrac{1}{3}, & x = -2 \end{cases}$

h) $f(x) = \dfrac{2x^2+4x-6}{x^2+x-2}$

(iii) Skizzieren Sie mithilfe von Asymptoten und Grenzwerten.

a) $\dfrac{2-x^2}{1-x}$

b) $\dfrac{\frac{x^3}{2}-2x+1}{x-2}$

2 Partialbruchzerlegung

(i) Vereinfachen Sie durch Partialbruchzerlegung.

a) $\dfrac{1}{x^2-25}$

b) $\dfrac{x+29}{x^2+3x-28}$

c) $\dfrac{3x^2+5x-2}{(x^2+1)(3x+1)}$

(ii) Vereinfachen Sie durch Partialbruchzerlegung. Dividieren Sie dazu die Polynome, um „Grad des Nenners $\geqslant$ Grad des Zählers“ zu erhalten.

a) $\dfrac{2x^3-x^2-10x+19}{x^2+x-6}$

b) $\dfrac{x^4-5x^3+7x^2-13x-10}{x^3-5x^2}$

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

3 Reihen

a) Schreiben Sie als Reihe mit Summenzeichen.

a) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots$

b) $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \dots$

c) $3 + 7 + 11 + 15 + \dots$

d) $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots$

e) $2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3 + \dots$

f) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

g) $1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \dots$

b) Leiten Sie die Gaußsche Summenformel her.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Verwenden Sie dazu

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - a_k = a_{n+1} - a_1$$

und berechnen Sie $(k+1)^2 - k^2$.

Viel Spaß beim Lösen. ☺