12.10.23

Inverse Matrizen

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, quadratisch, so ist es möglich, dass A eine Inverse A^{-1} besitzt.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}$$

$$A\vec{x} = \vec{y} \Rightarrow A^{-1}\vec{y} = \vec{x}$$

Bestimmung

$AA^{-1} = \mathbb{1}$ lösen wie ein Gleichungssystem

Schreibe $(A \mid \mathbb{1})$ und bringe dies durch Äquivalenzumformungen auf $(\mathbb{1} \mid A^{-1})$

Beispiel:

$$\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III}-\text{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \text{I}-2\text{II} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \mathrm{I}-3\,\mathrm{III} \\ \mathrm{II}+\mathrm{III} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -5 & 4 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} 2\,\mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ 5\,\mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -10 & 8 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 10 & -5 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III}+\mathrm{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -10 & 8 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{r} \mathrm{I}/2 \\ \mathrm{II}\,5 \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -5 & 4 & -2 & -3 \\ 5 & 0 & 5 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{r} \\ \mathrm{II}+\mathrm{I} \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -5 & 4 & -2 & -3 \\ 5 & 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \mathrm{II}/5 \\ \mathrm{III}/5 \\ \mathrm{I}/(-5) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} -1/5 & 3/5 & 2/5 \\ 3/5 & -4/5 & -1/5 \\ -4/5 & 2/5 & 3/5 \end{matrix}}_{A^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}$$

$A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}$ prüfen!

$A\vec{x} = \vec{b}$, A invertierbar $\Rightarrow$ $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

für beliebige $\vec{b}$!

Abbildung $f(\vec{x})$ $\quad f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ wird umgekehrt

$\qquad \vec{x} \longmapsto A\vec{x}$

durch $f^{-1}(\vec{x})$ $\quad f^{-1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\qquad \vec{x} \longmapsto A^{-1}\vec{x}$

das geht nur mit bijektiven Abbildungen

z. B. Skalierung, Scherung, Rotation

nicht bijektive Abbildungen: Projektion

6. Differenzialrechnung

6.1 Folgen

Folgen sind Zahlen einer Menge, die in einer bestimmten Reihenfolge angeordnet sind.

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

Es gibt:

a) monotone Folgen <u>Bsp</u>: $a_n = 4 + 3(n-1)$
$= (4, 7, 10, 13, \ldots)$

- wachsend, wenn $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$
- streng monoton wachsend, wenn $a_1 < a_2 < \ldots$
- fallend, wenn $a_1 \geq a_2 \geq \ldots$
- streng monoton fallend, wenn $a_1 > a_2 > \ldots$

b) alternierende Folgen $(a_n) = (-1)^{n+1} = (1, -1, 1, -1, \ldots)$

c) beschränkte Folgen $(a_n) = \frac{1}{n} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots) > 0$

<u>Grenzwert einer Folge</u>

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \qquad a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$$

<u>Satz</u>: Die Folge a_n besitzt den Grenzwert a, wenn nach Vorgabe einer <u>beliebig kleinen positiven</u>

Zahl ε ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $|a - a_n| < \varepsilon$.

Dann sagt man, die Folge **konvergiert**.

Andernfalls **divergiert** die Folge.

Bsp: Fibonacci-Folge

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

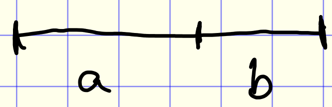
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{für } n \geq 3, \quad f_1, f_2 = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = 1{,}61803\ldots$$

$$\frac{13}{8} = 1{,}6250 \qquad \frac{21}{13} = 1{,}6154 \qquad \frac{34}{21} = 1{,}619$$

alternierende Abweichung: Quotient abwechselnd größer / kleiner als Grenzwert.

Goldener Schnitt



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \Phi \approx 1{,}61803\ldots$$

Reihen

Eine Reihe ist die Summe der Glieder einer Folge.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Partialsummen $\quad s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \longrightarrow \text{Folge } (s_n)$$

Die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>konvergiert</u>, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
Andernfalls divergiert die Reihe.

$$a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \longrightarrow \infty \quad \text{divergent!}$$

6.2 Grenzwert von Funktionen

Grenzwert der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x = a$

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \; ; \; f(x) \longrightarrow A \text{ für } x \to a$$

Einseitige Grenzwert:

linksseitiger $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = A$

rechtsseitiger $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A$

Die Funktion f besitzt an der Stelle a den Grenzwert A, wenn der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert gleich A sind.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = A \quad \wedge \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = A$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = A$$

<u>Bsp</u>: $f(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$ hat keinen GW für $x \to 0$

Grenzwerte im Unendlichen

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = A$$

Rechenregeln für Grenzwerte

Sei $\lim\limits_{x \to a} f(x) = F$ und $\lim\limits_{x \to a} g(x) = G$

- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = F + G = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} [c \cdot f(x)] = c \cdot F = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x \to a} g(x)\right)$

  $= F \cdot G$, falls F, G endlich
- $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) / g(x) \right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{F}{G}$

  falls F, G endlich

  $G \neq 0$

unbestimmte Ausdrücken

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0 \cdot \infty; \quad \infty - \infty; \quad 0^0; \quad \infty^0$$

Bsp $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 2}{x^3} \neq \dfrac{\lim\limits_{x \to \infty} x^2 - 2}{\lim\limits_{x \to \infty} x^3} = \text{"}\dfrac{\infty}{\infty}\text{"}$

wenn $x \to \infty$, beschränke $x > 0$

$\to$ Kürzen : x^3 $\quad \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}}{1} = \dfrac{\lim\limits_{x \to \infty} \left[\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}\right]}{\lim\limits_{x \to \infty} 1}$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \overset{\to 0}{\tfrac{1}{x}} - \lim\limits_{x\to\infty} \overset{\to 0}{\tfrac{2}{x^3}}}{\lim\limits_{x\to\infty} \underset{\to 1}{1}} = 0$$

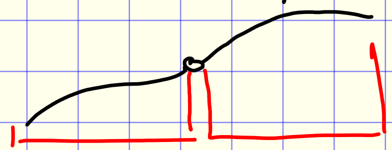
6.3 Stetigkeit von Funktionen

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt stetig an der Stelle a, wenn $f(x)$ an dieser Stelle definiert ist, $f(a)$ also existiert, und $\underbrace{\lim\limits_{x\to a}}_{\text{linksseitig + rechtsseitig}} f(x) = f(a)$

<u>Stetige Funktion</u>

Eine an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs stetige Funktion $y = f(x)$ heißt stetig.

↳ Durchzeichnen des Graphen



Sind $f(x)$, $g(x)$ zwei stetige Funktionen mit Definitionsbereich D und Wertebereich W, so gilt <u>sofern definiert</u> $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ebenfalls stetige Funktionen sind.
(zumindest bereichsweise)

<u>Unstetigkeitsstelle</u>

a ist Unstetigkeitsstelle, falls $f(x)$ an $x = a$ nicht stetig. → Sprungstelle, Polstelle, <u>Definitionslücke</u>
Kandidat

6.4. Ableitung einer Funktion

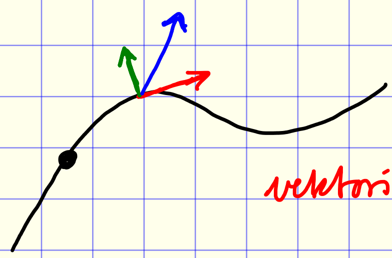
Wie ändert sich der Wert einer Funktion bei kleinster Änderung des Argumentes.

$\underbrace{\text{kleinster}}_{\text{infinitesimal}}$

geometrisch: Steigung der Tangenten an den Graphen

Beispiele aus höheren Dimensionen:

räumliche Änderung der Temperatur, Änderung des Ortes eines Teilchens über die Zeit



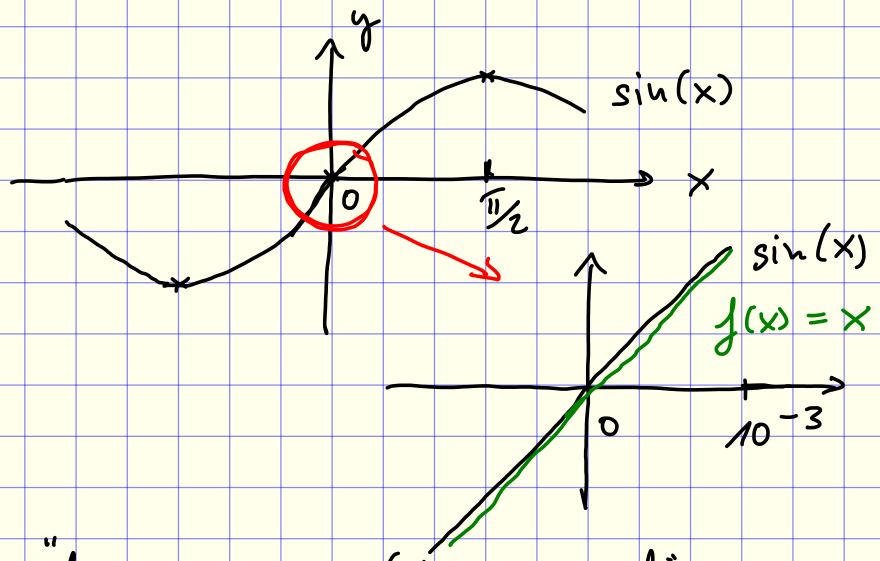
Extremwertuntersuchungen

wie muss ein System gestaltet werden, damit eine Größe maximal / minimal wird.

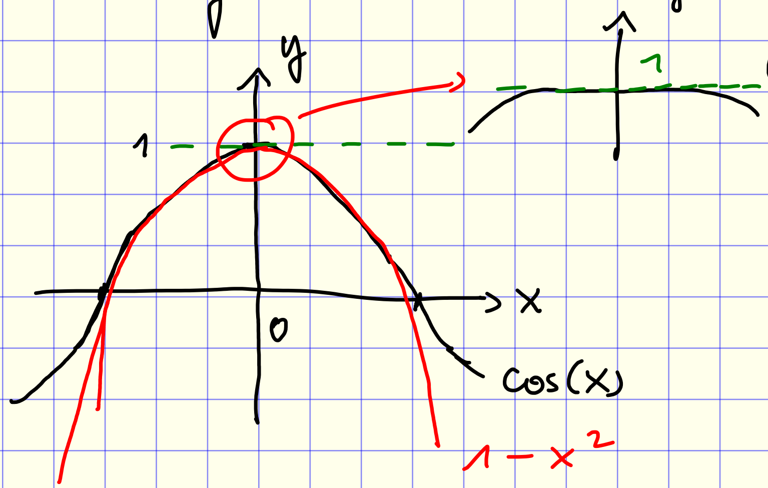
Linearisierung

lineare Annäherung einer Funktion in der Umgebung eines Punktes.

→ Ermöglicht Vereinfachung / Lösung von Problemen



Kleinwinkelnäherung: $\sin(x) \approx x$ für $x \ll 1$



(genauer $x \ll \frac{\text{Periode}}{4}$)

Existiert für eine Funktion $y = f(x)$ mit Definitionsbereich D der Grenzwert

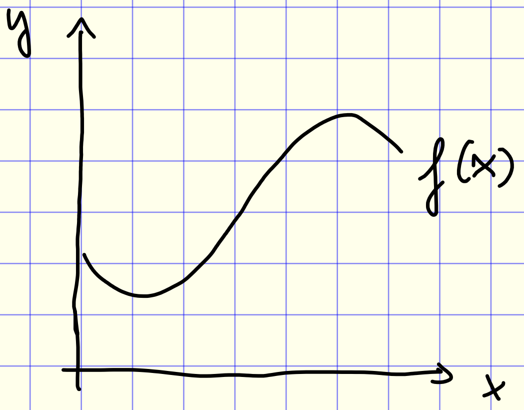
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \qquad x_0 \in D$$

dann nennt man $f'(x_0)$ die <u>Ableitung</u> der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$.

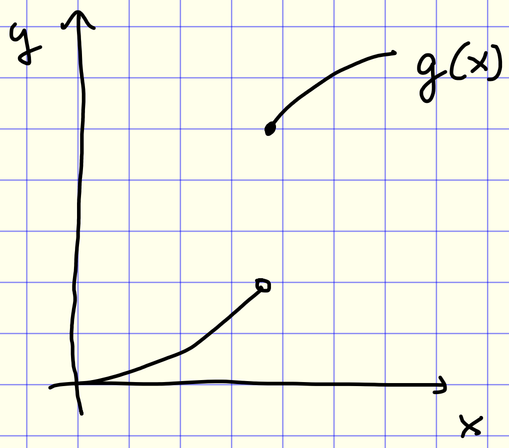
$f(x)$ ist differenzierbar an der Stelle x_0.

$f(x)$ ist differenzierbar, wenn $f(x)$ für alle $x \in D$ differenzierbar.

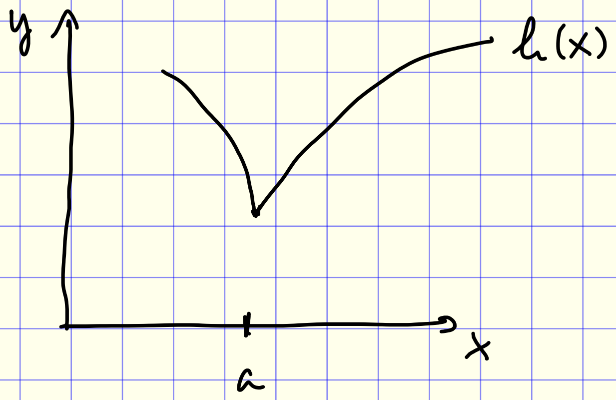
$f(x)$ ist stetig differenzierbar, falls $f'(x)$ eine stetige Funktion ist.



stetig und diff'bar



g(x) unstetig, nicht diff'bar



h(x) ist stetig,
nicht diff'bar

andere nützliche Form des Differenzenquotienten

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

$$\left(\text{oder} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\varepsilon} \right)$$

ergibt sich aus der Ersetzung

$$\varepsilon := x - x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = x - \varepsilon$$