$$1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \zeta(z) \quad ; \zeta$$

$\zeta(z)$ zeta

ξ xi

$$\zeta(1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots \infty$$

$$\zeta(2) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

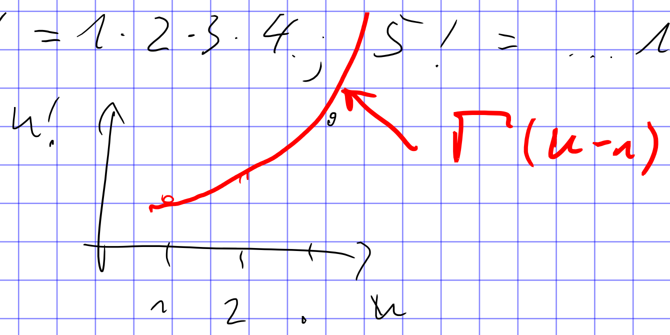
$$\zeta(\infty) = \frac{1}{1^\infty} + \cancel{\frac{1}{2^\infty}} + \dots = 1$$

$$\zeta(-2) = 1 + \frac{1}{(2^{-2})} + \frac{1}{3^{-2}}$$

$$= 1 + 2^2 = \dots$$

$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = \sum_{n}^{\infty} n =$$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, $5! = \dots 120 \dots$



13.10.23

6.5 Differentiationsregeln

1) konstante Funktion $y = f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$

$\rightarrow y' = 0$ $\qquad c = \text{const.}$

2) Faktorregel $y = f(x) \cdot c \rightarrow y' = c \cdot f'(x)$

3) Summen- / Differenzenregel $y = f(x) + g(x)$

$$y' = f'(x) + g'(x)$$

$$y = f(x) - g(x) \Rightarrow y' = f'(x) - g'(x)$$

4) Produktregel

① $y = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow y' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$

② $y = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$

$$\Rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x)\, g(x)\, h'(x)$$

① ⇒ ②: $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$

$$= f(x) \cdot \left(g(x) \cdot h(x) \right)$$

$$\overset{①}{=} f'(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) + f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x))'$$

$$\overset{①}{=} f'(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) + f(x) \cdot (g'(x) h(x) + g(x) h'(x))$$

→ Potenzfunktionen (Polynome) $y = x^n \ (n \in \mathbb{Z})$

$$y = \underbrace{x \cdot x \cdot x \ldots \cdot x}_{n\text{-mal}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Potenzregel: $y' = n \cdot x^{n-1}$

Produktregel: $(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)'$

$$= \underbrace{(x)'}_{1} \cdot \underbrace{x \cdot x \ldots \cdot x}_{(n-1)\text{-mal}} + x\, \underbrace{(x)'}_{1} \cdot x \cdot \ldots \cdot x + \ldots + x \cdot x \ldots x \cdot \underbrace{(x)'}_{1}$$

n-Terme

$$= n \cdot x^{n-1}$$

Polynom: $y = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$

$$y' = \sum_{k=0}^{n} c_k k x^{k-1} = c_1 x^0 + c_2 \cdot 2x + \ldots + n c_n x^{n-1}$$

5) Quotientenregel

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{(g(x))^2}$$

Beweis: DQ

speziell: $f(x) = \text{cost.}$ Bsp: $f(x) = 1$

$$y = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$$

6) Kettenregel

$y = F(x) = f(h(x))$ und $z = h(x)$

$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto z = h(x)$ $\quad$ $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \longmapsto f(z) = y$

$F(x)$ ist differenzierbar, wenn $y = f(z)$ und $z = h(x)$ differenzierbar sind, und es gilt:

$$y' = F'(x) = \left.\frac{df}{dz}\right|_{h(x)} \cdot \left.\frac{dh}{dx}\right|_{x} = f'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Abl. nach z

an Stelle $h(x)$
→ einsetzen in die Ableitung

= Ableitung der äußeren Funktion an der Stelle der inneren multipliziert mit der Ableitung der inneren Funktion.

7) Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $f(x)$ diff'bar mit $f'(x) \neq 0$ und Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ $[f^{-1}(f(x)) = x]$, so ist auch $f^{-1}(x)$ diff'bar

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

<u>Bsp:</u> Ableitungsregeln

- $y = 3 \rightarrow y' = 0$
- $y = 3x^2 \rightarrow y' = 6x$
- $y = x^2 + 3x \rightarrow 2x + 3$
- $y = x^7 \rightarrow 7x^6$
- $y = 3x^2 \cdot \sin(x) \overset{PR}{=} (3x^2)' \sin(x) + 3x^2 \cdot (\sin(x))'$

$$= 6x \sin(x) + 3x^2 \cdot \cos(x)$$

- $$y = \frac{5x-1}{2x+3} \overset{QR}{=} y' = \frac{5\cdot(2x+3) - 2\cdot(5x-1)}{(2x+3)^2}$$

$$= \frac{\cancel{10x} + 15 - \cancel{10x} + 2}{(2x+3)^2}$$

$$= \frac{17}{(2x+3)^2}$$

- $\sqrt{5x^2-7x+8}$ $\qquad z = h(x) = 5x^2 - 7x + 8$

$$f(z) = \sqrt{z}$$

$$(f(h(x)))' = \underbrace{\left.\frac{d\sqrt{z}}{dz}\right|_z} \cdot \left.\frac{dh}{dx}\right|_x$$

$$\frac{dz^{1/2}}{dz} = \frac{1}{2} z^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

Potenzregel für Exp. aus $\mathbb{R}$

$$(x^q)' = q\, x^{q-1}$$

$$q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(f(h(x)))' = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot \left.\frac{dh}{dx}\right|_x = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot \frac{d(5x^2-7x+8)}{dx}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot (10x - 7) = \frac{10x-7}{2\sqrt{5x^2-7x+8}}$$

$\uparrow$

$h(x) = 5x^2 - 7x + 8$

Schreibweisen:

$$f'(x_0) \overset{DQ}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} = \frac{df}{dx}(x_0)$$

wobei $\Delta f = f(x_0) - f(x)$, $\Delta x = x_0 - x$

Da die Ableitung eine lineare Abbildung ist, die man „wie eine Matrix multipliziert", schreibt man auch

$$\frac{d}{dx} f(x), \quad D f(x), \quad \partial_x f(x), \quad D_x f(x)$$

Physik: Ableitungen nach der Zeit $\frac{d}{dt}$ werden mit einem Punkt abgekürzt

$x = x(t)$ Ortskoordinate

$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v(t)$ Geschwindigkeit (x-Richtung)

höhere Ableitungen

- ist $y = f(x)$ diff'bar auf Interval D, so kann dort $f'(x)$ gebildet werden
- ist $y = f'(x)$ diff'bar, so nennt man

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2}(x)$$ die <u>zweite Ableitung</u> von $f(x)$

- $f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$ ist die n-te Ableitung.

<u>Bsp</u>: $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 5x - 2$

$f'(x) = 16x^3 - 36x^2 + 5$

$f''(x) = 48x^2 - 72x$

$f'''(x) = 96x - 72$

$f^{(4)}(x) = 96$

$f^{(5)}(x) = 0 = f^{(6)}(x) = \ldots = f^{(n)}(x) \quad n \geq 5$

6.6. Elementare Ableitungsfunktionen

- algebraische Funktionen
  - ↳ rationale

$y = x^n \rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$ ganz (Polynome)

$y = \frac{1}{x} \rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$ gebrochen

  - ↳ irrationale

$y = \sqrt{x} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow y = x^{1/n} \rightarrow y = \frac{1}{n} x^{1/n - 1}$

$$x^{1/n - 1} = x^{\frac{1}{n} - \frac{n}{n}} = x^{\frac{1-n}{n}}$$

$$= \sqrt[n]{x^{1-n}}$$

$$\frac{d}{dx} x^{1/n} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{x^{1-n}}$$

$$= \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

↳ transzendente Funktionen

- trigonometrische $y = \sin(x)$, $y' = \cos(x)$

$y = \cos(x)$, $y' = -\sin(x)$

$y = \tan(x)$, $y' \overset{QR}{=} \frac{1}{\cos^2(x)}$; $y = \cot(x)$

$\rightarrow y' \overset{QR}{=} -\frac{1}{\sin^2(x)}$

- exponentiale

$$y = a^x \longrightarrow y' = a^x \cdot \ln(a)$$

speziell: $y = e^x \rightarrow y' = e^x = y$

$\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$

Beweis: $y = a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln(a)}$ $h(x)$

$\rightarrow$ Kettenregel $\frac{d}{dx} e^{h(x)} = e^{h(x)} \cdot h'(x)$

$$h'(x) = \ln(a)$$

$$y' = e^{\ln(a)\cdot x} \cdot \ln(a) = \underbrace{e^{\ln(a^x)}}_{a^x} \cdot \ln(a)$$

$$= a^x \ln(a)$$

- Logarithmusfunktionen

$y = \ln(x) \rightarrow y' = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$

Regel für Abl. der Umkehrfunktion

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$f^{-1}(x) = \ln(x) \longrightarrow f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{(\ln(x))}} = \frac{1}{x}$$

$y = \log_a(x) \rightarrow y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

$$y' = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x}$$

$(a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, x > 0)$

6.7 Eigenschaften von Funktionen

- Sekanten = Geraden, die den Graph einer Funktion in mindestens zwei Punkten schneiden

$P_1(x_1, f(x_1))$ $\qquad$ $P_2(x_2, f(x_2))$

$$y = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)+f(x_1)$$

- Tangenten = Geraden, die den Graph einer F. in einem Punkt berühren $P_a(a, f(a))$

$$y = \underline{f'(a)}\,(x-a)+f(a)$$

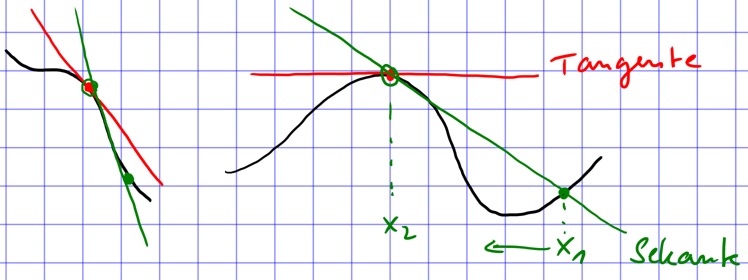
Steigung der Tangenten = Ableitung an Stelle a

Bringt man die Punkte P_1 und P_2 einer Sekante zusammen, so geht diese in die Tangente über, falls f an der Stelle diff'bar.

$$y = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\,(x-x_1)+f(x_1)$$

$$\lim_{x_1\to x_2} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \overset{DQ}{=} f'(x_2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x_1\to x_2} y = f'(x_2)\,(x-x_2)+f(x_2)$$

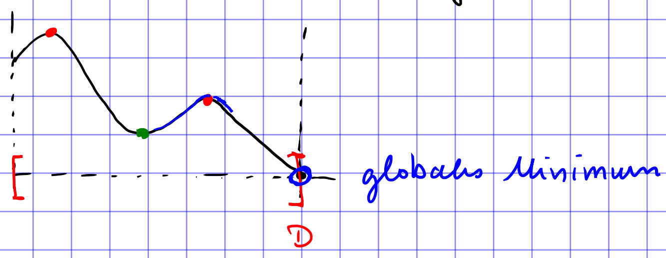


- Extremwerte von Funktionen

$y = f(x)$ besitzt bei $x = a$ ein lokales Maximum, wenn in der Umgebung von a alle $f(x)$ kleiner als $f(a)$ sind (... lokales Minimum $\rightarrow$ $f(x)$ größer $f(a)$)

↳ lokales Maximum: $f(a) > f(x)$ für $x \neq a$

↳ lokales Minimum: $f(a) < f(x)$ für $x \neq a$



notwendige Bedingung

lokales Extremum von $f(x)$ an Stelle $x = a$

$$\Rightarrow \quad f'(a) = 0$$

Umkehrung: $f'(a) \neq 0 \Rightarrow$ kein lokales Extremum

hinreichende Bedingung

ist die zweite Ableitung von $f(x)$ $f''(x)$ an der Stelle $x = a$ verschieden von 0, d.h. $f''(a) \neq 0$ und $f'(a) = 0$, so befindet sich an Stelle a ein lokales Extremum.

↳ lokales Maximum, wenn $f''(a) < 0$

↳ lokales Minimum, wenn $f''(a) > 0$

Gilt jedoch $f''(a) = 0$, so hat $f(x)$ bei a ein lokales Extremum, falls ein gerades n existiert, so dass

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$$

und $f^{n}(a) \neq 0$

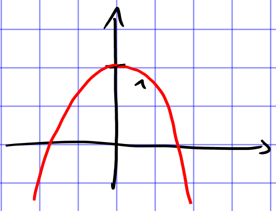
① bei a Extremum $\Rightarrow f'(a) = 0$

② $(f'(a) = 0 \;\wedge\; f''(a) \neq 0) \Rightarrow$ bei a Extremum

③ $f'(a) = 0 \;\wedge\; (f^{n}(a) \neq 0,\; f'(a) \ldots f^{(n-1)}(a) = 0,\;$ n gerade$)$

$\Leftrightarrow$ Extremum bei a

Bsp: $f(x) = -x^4 + 1$



$f'(x) = -4x^3$

$f'(0) = 0$, $f'(x) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0$

$f''(x) = -12x^2$ $f''(0) = 0 \rightarrow$ ~~kein Extremum~~

$f'''(x) = -24x$ $f^{(4)}(x) = -24$

$f'''(x=0) = 0$ $f^{(4)}(0) \neq 0$ $f^{(4)}(0) < 0$

$\rightarrow$ Maximum

- Krümmungsverhalten

$\rightarrow$ Unterscheidung konvexe und konkave Bereiche

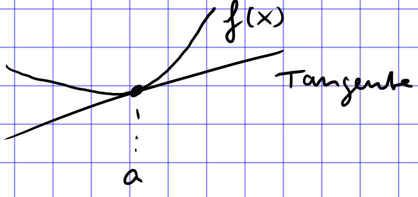
Eine Funktion heißt:

- von unten konvex an der Stelle $x = a$, wenn alle Punkte in der Umgebung von a oberhalb der Tangente im Punkt $P(a, f(a))$

  $y' = f'(x)$ ist dort monoton wachsend

  $y = f(x)$ ist dort linksgekrümmt

  $f''(x) > 0$



- von unten konkav an $x = a$ —— " ——

  unterhalb der Tangente

  $f'(x)$ monoton fallend

  $y = f(x)$ ist rechtsgekrümmt

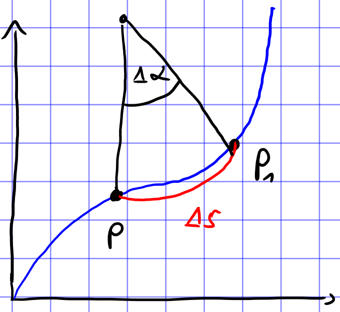
  $f''(x) < 0$

- Krümmungsradius

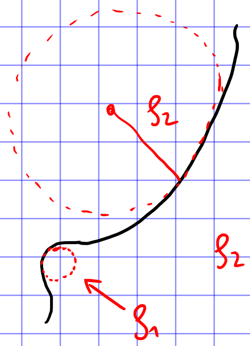
$$\kappa = \lim_{P_1 \to P} \frac{\alpha_1 - \alpha}{\Delta s}$$

Kappa

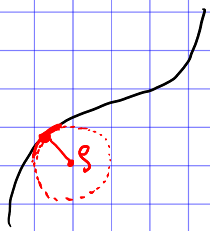
$$= \lim_{P_1 \to P} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$$



$$\kappa = \frac{f''(x)}{\left[1 + f'^2(x)\right]^{3/2}} \rightarrow \rho = \frac{1}{|\kappa|}$$ Krümmungsradius



$\rho_2 > \rho_1$



$$\kappa = \frac{1}{\rho}$$