16.10.23

7. Integralrechnung

7.1 Ober- und Untersummen

Betrachte: Funktion $f(x)$ zunächst auf Intervall $[a,b]$

Eine Näherung für den Flächeninhalt, welchen der Graph von $f(x)$ mit der x-Achse in $[a,b]$ einschließt ist gegeben durch die Summe

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x \,, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Wir unterscheiden Ober- und Untersummen, und wählen x_k entsprechend

Bsp: $4-x^2$, Fläche berechnen zw. Nullstellen $x=\pm 2$

Für die Obersumme wählen wir $x_k = -2+(k+1)\Delta x$

$k = 1, \ldots, \frac{n}{2}-1$

und $x_k = -2+(k-1)\cdot\Delta x$,

$k = \frac{n}{2}+1, \ldots, n$

$\hookrightarrow x_k \in X_O$

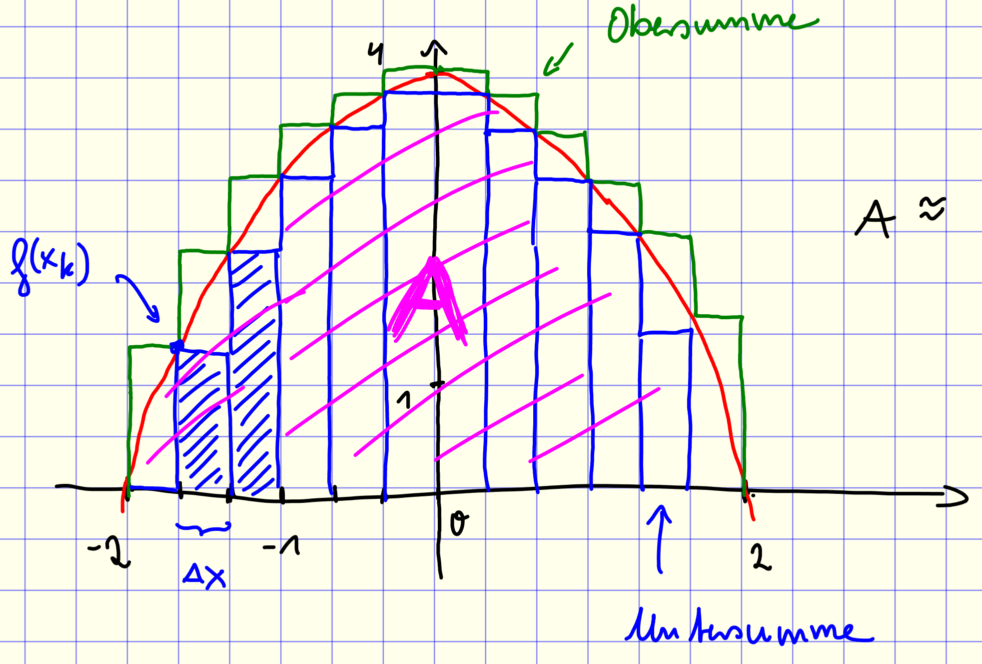
Zur Vereinfachung betrachten wir nur gerade n

(die Definition ließe sich auf ungerade n erweitern)

Für die Untersumme wählen wir $x_k = -2+(k-1)\Delta x$

$k = 1, \ldots, \frac{n}{2}-1$

und $x_k = -2+(k+1)\Delta x \quad k = \frac{n}{2}+1, \ldots, n$



$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x$$

Die Definition von Ober- und Untersumme ist an das Monotonieverhalten gebunden.

Obersumme O_n und Untersumme U_n

$$O_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x \qquad x_k \in X_O$$

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x \qquad x_k \in X_U \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

sind Folgen von Partialsummen.

In diesem Beispiel: Die Grenzwerte sind gleich dem exakten Flächeninhalt A.

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} U_n = A$$

$$O_n = \sum_{k=1}^{n} (4 - x_k^2)\cdot\Delta x = \sum_{k=1}^{n} \left(4 - (-2 + (k+1)\cdot\Delta x)^2\right)\Delta x$$

$x_k \in X_O$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\cancel{4} - (\cancel{4} - 2\,(k+1)\cdot\Delta x + (k+1)^2\Delta x^2)\right)\Delta x$$

$$= \sum_{k=1}^{n} + 2(k+1)\Delta x^2 - (k+1)^2 \Delta x^3$$

$$= 2\Delta x^2 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (k+1)} - \Delta x^3 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(2n+1)(n+1)$$

Mit $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$$= \frac{2(b-a)^2}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) - \frac{(b-a)^3}{n^3}\left(\frac{1}{6} n(2n+1)(n+1) - 1\right)$$

Grenzwert von diesem Term bilden → Hausaufgabe!

Anmerkung: liegt der Graph und die eingeschlossene Fläche unterhalb der x-Achse, so sind die Höhen der Rechtecke negativ $f(x_k) < 0$. Der Flächeninhalt nach unserer Definition kann auch negative Werte annehmen.

Deshalb bezeichnet man ihn als orientierten Flächeninhalt. ↔ absoluten Flächeninhalt

7.2 Integral und Integrierbarkeit

Definition: Eine Funktion $f(x)$ ist auf dem Intervall $[a,b]$ integrierbar, wenn die Grenzwerte von

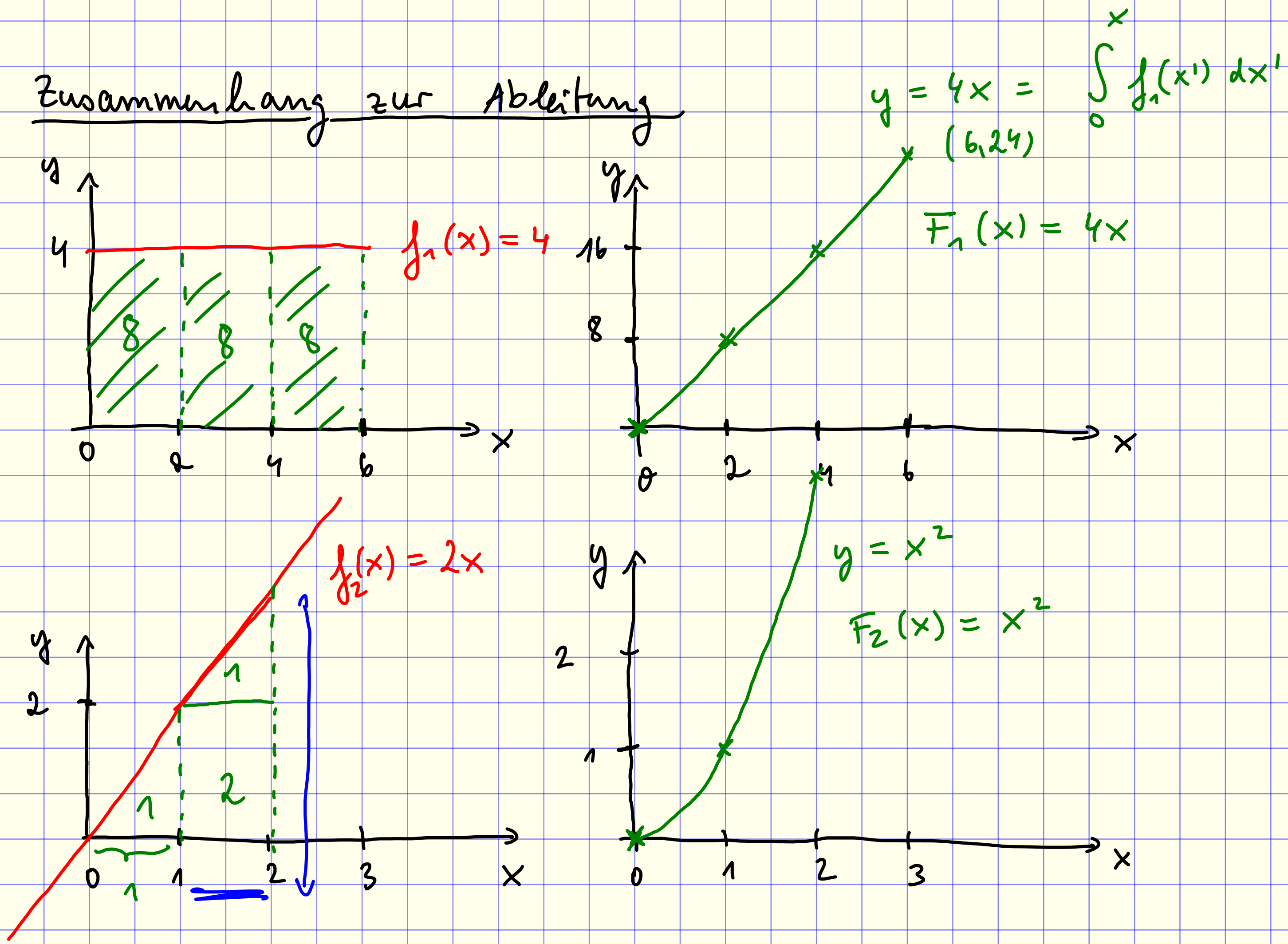
Ober- und Untersumme existieren und gleich sind.

Den orientierten Flächeninhalt bezeichnet man als das <u>bestimmte Integral</u>

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} U_n$$

$f(x)$ ist der <u>Integrand</u>, a und b die untere bzw. obere Grenze.

Zusammenhang zur Ableitung



Zu dem Integral $F(x)$ beschreibt der Integrand $f(x)$ die Änderungsrate.

Integrieren $\hat{=}$ Differenzieren rückwärts / Umkehroperation

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = g(x) \quad \Big| \int \text{ als Operator}$$

Variablen separieren

$$df = g(x)dx \Rightarrow \underbrace{\int df} = \int g(x)\,dx$$

$$\int 1 \, df = f \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = \int g(x)\,dx$$

$$= \int \frac{df}{\cancel{dx}} \cancel{dx}$$

$$= \int df$$

Definition / Hintergrund:

über Grenzwerte, Differenzenquotient, Partialsummen

Bemerkung: $\int bla \, d\,bla = \frac{1}{2} bla^2$

$\int d\,bla = bla$

Definition Stammfunktion

Eine Funktion F mit der Eigenschaft $F' = f$ heißt Stammfunktion von f. Ist F Stammfunktion von f, so auch $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Beweis: Regeln der Differenzialrechnung $(F(x)+c)' = F'(x)$

$= f(x)$

7.3 Hauptsatz der Differenzial und Integralrechnung

Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

7.4 Bestimmung von Stammfunktionen, Rechenregeln

bestimmtes Integral

$\swarrow$ $\searrow$

Fläche bis obere Grenze

Stammfunktion an oberer Grenze

unbestimmtes Integral Definition:

Ist F Stammfunktion einer Funktion f, so wird die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f als das **unbestimmte Integral** von f bezeichnet.

Man schreibt dafür $\int f(x) = F(x) + c, \; c \in \mathbb{R}$

Anmerkung:

Die Stammfunktion ist immer bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Rechenregeln:

lineare Abbildung

a) Faktorregel $\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$

b) Summenregel $\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

c) Lineare Verkettung

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c, \; c \in \mathbb{R}$$

(allgemein: Substitution)

d) Vertauschung der Integrationsgrenzen

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$ (Hauptsatz)

e) Nullintegral $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ für $b = a$

f) Addition von Integrationsintervallen (f definiert auf $[a, c]$)

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

(Hauptsatz)

Wichtige Stammfunktionen

- Potenzfunktionen $\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$

  $r \neq -1$, $r \in \mathbb{R}$

- Wurzelfunktion $r = 1/2$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{1/2+1} + c$$

$$= \frac{1}{3/2} x^{3/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

- Hyperbelfunktion

$$\int 1/x\,dx = \ln(|x|) + c$$

- Exponentialfunktion

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

↳ allgemein: $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$, $a \neq 1$, $a > 0$

- Logarithmusfunktion

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x + c$$

- Trigonometrische Funktionen

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + c$$

<u>Beweis</u>: Differentiation, Summenformel (Taylor), ...

Uneigentliche Integrale

Gegeben: Funktion $f(x)$ mit Definitionslücke oder nicht endliche Grenze im Integral.

→ Das uneigentliche Integral ist über den Grenzwert des bestimmten Integrals definiert

Sei $f(x)$ eine integrierbare Funktion mit Definitionslücke $x = x_0$ und $a < x_0 < b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to x_0^-} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{c \to x_0^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

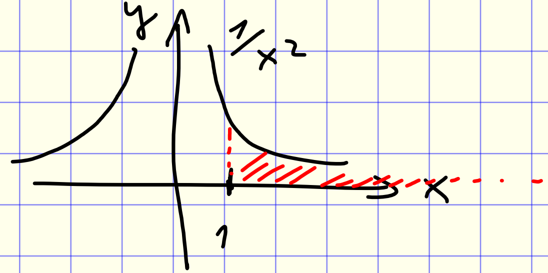
Sei $f(x)$ beliebig, integrierbar und ohne Def'lücke in $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{c \to -\infty} \int_c^a f(x)\,dx$$

$$\int_b^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{c \to +\infty} \int_b^c f(x)\,dx$$

Bsp:

$$\int_1^\infty 1/x^2 \, dx$$

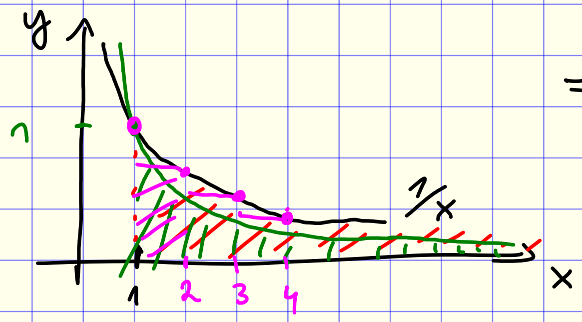


$$= -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty$$

$$= \lim_{c\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^c = \lim_{c\to\infty} \underbrace{-\frac{1}{c}}_{\to 0^-} + 1 = 1$$

$$\int_1^\infty 1/x \, dx = \ln(x)\Big|_1^\infty = \lim_{c\to\infty}\big(\underbrace{\ln(c)}_{\to\infty} - \underbrace{\ln(1)}_{0}\big)$$

$$= +\infty$$



Zusammenhang: Konvergenz von Reihen

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = \infty \qquad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} \text{ endlich!}$$

Konvergenzkriterium für Reihen: Integralkriterium

Weitere Regeln:

① partielle Integration

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot G(x) - \int f'(x)\cdot G(x)\,dx$$

$G(x) = \int g(x)\,dx$ → Wir brauchen jetzt eine Stammfunktion $G(x)$ und Lösung zu $\int f'(x)\, G(x)\,dx$

② Substitution

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(g(x)) \frac{dg}{\cancel{dx}} \cancel{dx}$$

$$= \int f(g)\, dg$$

äquivalent

$$\int f(x)\, dx \qquad x := g(y), \quad g \text{ invertierbar, diff'bar}$$

$$\frac{dx}{dy} = g'(y) \Rightarrow dx = g'(y) \cdot dy$$

$$\hookrightarrow \int f(\underset{\substack{\uparrow \\ x = g(y)}}{x})\, g'(y)\, dy = \int f(g(y))\, \overbrace{g'(y)\, dy}^{= dx}$$

Man kann Integralgrenzen beibehalten, muss diese aber anpassen

Bsp:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(y))\, g'(y)\, dy$$

$\uparrow$ $x = g(y)$

alternativ: Finde erst Stammfunktion, löse unbest. Integral

$$\int_a^b f(x)dx \xrightarrow[x = g(y)]{\text{Substitution}} \int \underbrace{f(g(y))\, g'(y)}_{h(y)}\, dy \Bigg|_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} = H(y) + c \Bigg|_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)}$$

Rücksubstitution: $y = g^{-1}(x) \Rightarrow F(x)\Big|_a^b = H(g^{-1}(x)) + c \Big|_a^b$

Bsp:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$g(y) = \tan(y)$

Substitution: $x = \tan(y)$ $\quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2(y)}$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\underbrace{\frac{dx}{dy}}_{\frac{1}{\cos^2(y)}}\,dy = \int \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{f(x)}\underbrace{\frac{1}{\cos^2 y}}_{g'(y)}\,dy$$

$$= \int \frac{1}{1+\tan^2 y}\cdot\frac{1}{\cos^2 y}\,dy = \int \frac{1}{1+\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}}\,\frac{1}{\cos^2 y}\,dy$$

$$= \int \frac{1}{\underbrace{\cos^2 y+\sin^2 y}_{=1}}\,dy = \int dy = \underbrace{y}_{H(y)} + c$$

Rücksubstitution

$y = \arctan(x) \Rightarrow F(x) = \arctan(x) + c$ $\quad g^{-1}(x) = \arctan(x)$

$g(y) = \frac{1}{y} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

$y = \frac{1}{x}$

$x = \tan(y) \Rightarrow y = \arctan(x)$