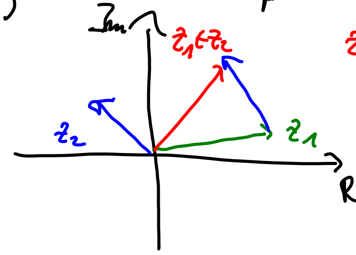
komplexe Zahlen II + fun

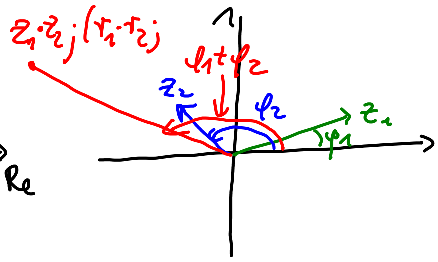
19.10.23

wdhl.: $z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$

Rechnen $+; -; \cdot; :$ mit $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|} \in \mathbb{R}$

$+; \cdot$ in der komplexen Ebene

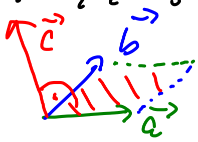




Vgl. bei Vektoren

i) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \in \mathbb{R}$

ii) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$



wir hatten $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \iff e^x; \sin x; \cos x$ selbe Funktionenklasse für Schwingungen und Wellen

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} \cdot e^{ib} = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$$

$$\downarrow$$

$$\cos(a+b) + i\sin(a+b) = (\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b) + i(\sin a \cdot \cos b + \cos a \sin b)$$

Realteile & Imaginärteile müssen gleich sein

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \sin b$ $\hat{=}$ Additionstheoreme

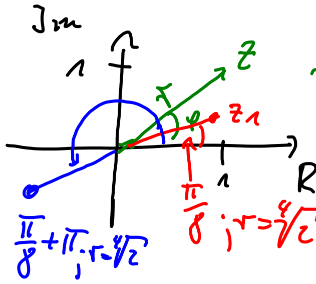
$\sin(a+b) = \sin \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$

Funktionen mit komplexen Argumenten also $f(z)$

$z = a + ib = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi + 2\pi \cdot k)}$; $k \in \mathbb{Z}$

$z^n = (a+ib)^n = r^n e^{in\varphi}$; speziell $\frac{1}{i} = i^{-1} = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{1} = -i = \frac{1}{i}$

$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)}$



$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\varphi = 45° = \frac{\pi}{4}$

$\hat{=}$ $k = 0$

$k = 1$

$k = 2 \hat{=} k = 0$

Bsp.: $y = \sqrt{z}$; $z = 1 + i$

$y = \sqrt{r}\, e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{2}\right)}$

$y = \sqrt{\sqrt{2}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \pi \cdot k\right)}$

$y = \sqrt[4]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \pi k\right)}$

$\hat{=}$ 2 Lösungen für $\sqrt{z}$

$\sqrt{-1} = \sqrt{1e^{i\pi}} = 1e^{i\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right)}$

$k = 0 \Rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$k = 1 \Rightarrow e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)} = e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i$

analog $\sqrt[3]{z} \Rightarrow 3$ Lösungen da $k = 0; k = 1, k = 2$, dann wieder von vorne

$$e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b),$$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}; \quad \text{analog} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \ldots$$

$$\ln z = \ln\left(r e^{i(\varphi + 2\pi k)}\right) = \ln r + i(\varphi + 2\pi k)$$

komplexe Zahlen als Matrizen

$$z = a + ib = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{E}} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{I}};$$

$$\mathbb{E} \cdot \mathbb{E} = \mathbb{E}$$

z.B. $$\mathbb{I} \cdot \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 - 1\cdot 1 & 0(-1) + (-1)\cdot 0 \\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot(-1) + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \leftarrow -\mathbb{E}$$

$$\hat{=}\ i \cdot i = -1$$

! bei Matrizen oft $A \cdot B \neq B \cdot A$

$$z_1 \cdot z_2 = \left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \left[\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & a_1 a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underbrace{a_1 \cdot 0 + 0 b_2}_{0} & -a_1 b_2 \\ a_1 b_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b_1 a_2 \\ b_1 a_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_1 b_2 & 0 \\ 0 & -b_1 b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & 0 \\ 0 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -a_1 b_2 - b_1 a_2 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) \cdot \mathbb{E} + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \mathbb{I} = a + ib \ \hat{=}\ \underline{\underline{z_1 \cdot z_2}}$$

Wie geht es weiter?

nat. Zahlen $n \in \mathbb{N}$ – es gibt ein kleinstes

ganze Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ – jede Zahl hat Vorgänger / Nachfolger

rationale Zahlen $p \in \mathbb{Q}$ – jedes p als Quotient von 2 ganzen Zahlen

reelle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ – $a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$, als Dezimalbruch so lang

Problem $a^2 = -1$

komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ $\quad z^2 = -1 \Rightarrow z = \pm i$; aber $z_1 > z_2$ sinnlos

$\Rightarrow$ keine Ungleichungen, kein $+\infty$ versus $-\infty$

nur ∞ $\quad |z| \to \infty$; $i\infty$; $-i\infty$

$a^2+b^2 = (a+ib)(a-ib)$

geht immer

auch $a^4+b^4 = (a - \frac{1+i}{2}\sqrt{2}\,b)(\quad)(\quad)(\quad)$

aber $a^2+b^2+c^2+d^2 = (ax_1+by_1+cz_1+dt_1)(ax_2+by_2+cz_2+dt_2)$

geg. a,b,c,d suchen x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2, t_1, t_2

ausmultiplizieren $\Rightarrow$ Gleichungssystem für $x_1, x_2, y_1 \ldots$

aus $a^2 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1$; $b^2 \Rightarrow y_1 y_2 = 1$; $c^2 \Rightarrow z_1 z_2 = 1$; $d^2 \Rightarrow t_1 t_2 = 1$

aus $a \cdot b \Rightarrow x_1 y_2 + y_1 x_2 = 0$, analog $x_1 z_2 + x_2 z_1 = 0$; $\ldots$; $y_1 z_2 + y_2 z_1 = 0$

$\Rightarrow$ 10 Gleichungen für 8 Unbekannte

$$\frac{x_1}{x_2} = \underbrace{-\frac{y_1}{y_2} = -\frac{z_1}{z_2}}\ ; \quad \frac{y_1}{y_2} = -\frac{z_1}{z_2}$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \Longleftrightarrow \frac{y_1}{y_2} = -\frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = 0$$

Widerspruch ⚡

Lösung sind Quaternionen $z \in \mathbb{H}$ ($\mathbb{H}$ – Hamilton)

nur z mit Realteil und i, j; k mit $i^2 = -1$; $j^2 = -1$; $k^2 = -1$

aber $i \cdot j = k$; $j \cdot i = -k$

Bsp: $(i+j)^2 = (i+j)(i+j) = -1 + k - k - 1 = -2$

auch $z \cdot \bar{z} = (a+bi+cj+dk)\cdot(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2$

$\frac{z_1}{z_1} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|}$

alle Mischterme entfallen

Wichtig für Spiele dort Drehungen effizient im Computer mit Quaternionen

Quaternionen in Matrizen

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} 0 & & & -1 \\ & & -1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Spinor in Physik; Pauli-Spin Matrizen