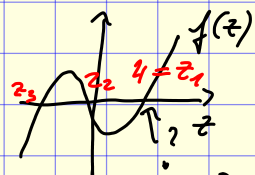
Komplexe Zahlen

18.10.23

- Mittelalter Bombelli (ca. 1550) Problem mit $f(z)=z^3-15z-4$



- Cardano (1501–1576) allg. Lösungsformel für $x^3+ax^2+bx+c=0$

zuerst $x=z-\frac{a}{3} \Rightarrow z^3+pz+q=0$, dann Ansatz $z^3=(u+v)^3=u^3+3uv(u+v)+v^3$

Lösungsformel von Cardano

für $z^3-15z-4=0 \Rightarrow z_1=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$?

Betrachten $(2+\sqrt{a})^3=8+12\sqrt{a}+6a+\sqrt{a}^3$

wenn $a=-1$ $\quad = 8+12\sqrt{-1}-6-\sqrt{-1} = 2+11\sqrt{-1} = 2+\sqrt{-121}$

& $\sqrt{-1}^3=-\sqrt{-1}$

Lsg: $z_1=\sqrt[3]{(2+\sqrt{-1})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{-1})^3}=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$

passt? $f(4)=4^3-15\cdot 4-4=0$ ✓

wenn $z_1=4 \Rightarrow z_2=-2+\sqrt{3}$; $z_3=-2-\sqrt{3}$

wir lernen: komplexe Zahlen sind ein Rechenhilfsmittel?

z.B. auch in Quantenmechanik

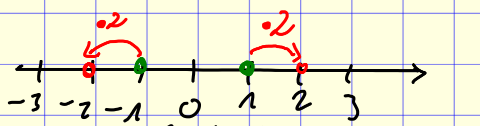
$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+V(x)\psi(x,t)$$

Messung nur $|\psi|^2$ möglich; $|\psi|^2\in\mathbb{R}$

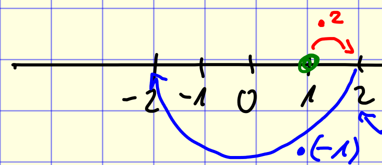
Motivation: Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

zurück zu reellen Zahlen: Multiplikation auf Zahlstrahl

$\hat{=}\ \cdot 2\cdot(-1)$



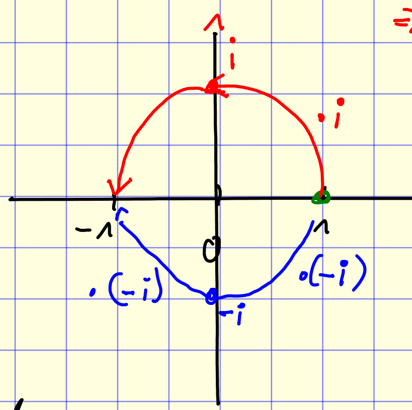
≙ Streckung / Stauchung



Spiegelung um 0

wollen nun wissen, was zu tun um

$1\cdot x\cdot x=-1$



$\Rightarrow 1\cdot i\cdot i=-1$

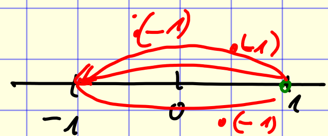
$x_1=i$

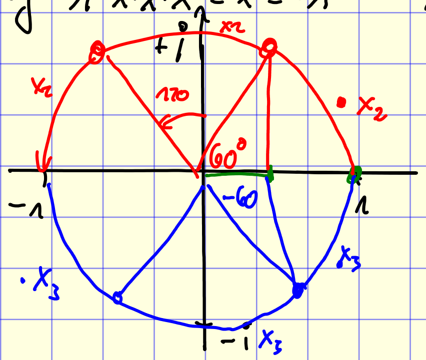
$1(-i)(-i)=-1$

$x_2=-i$

$1\cdot x^2=-1 \Leftrightarrow x=\pm i$

analog $1\cdot x\cdot x\cdot x_1=x^3=-1$ $\quad x_1=-1$

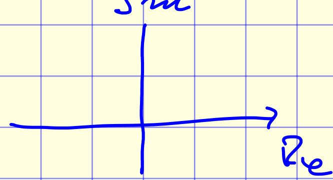




$x_2=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ$

$x_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

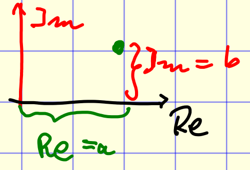


Gaußsche Zahlenebene

jeder Pkt eindeutig mit {Re, Im}

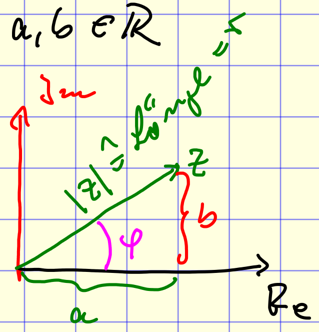
Multiplikation ≙ auch Drehung

Angabe von z: brauchen zwei Zahlen



1. kartesische Darstellung

$\boxed{z = a + ib}$ a – Realteil, b – Imaginärteil $\Big\}$ $a, b \in \mathbb{R}$



2. polare Darstellung

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \; ; \; r, \varphi \in \mathbb{R}$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \; ; \quad \tan\varphi = \frac{b}{a} \; ; \quad \varphi = \arctan(a, b)$$

$$\Updownarrow$$

$$a = r\cos\varphi \; ; \quad b = r\sin\varphi$$

3. exponentielle Darstellung (Beweis später)

$z = re^{i\varphi}$ weil $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

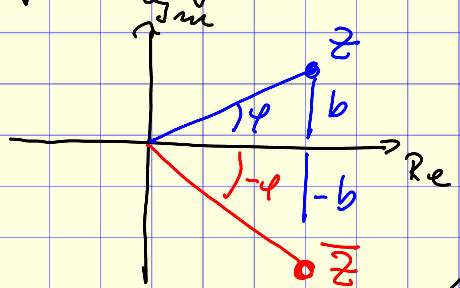
Eulersche Formel $\boxed{e^{i\pi} = -1}$ oder $e^{i\pi} + 1 = 0$

Bem: $e^{i(\pi + 2\pi)} = -1 = e^{i\pi}$

Rechnen: Gleichheit, wenn $z_1 = z_2$ g.d.w. $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$, $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$ $\Rightarrow$ $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$

oder $r_1 = r_2$; $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

Def: konjugiert komplex ≙ Spiegelung an reeller Achse



$z = a + ib \Rightarrow \bar{z} = a - ib$

oder

$z = re^{i\varphi} \Rightarrow \bar{z} = re^{-i\varphi}$

wozu? $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$

$$z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - iab + iba + b^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$$

$$z \cdot \bar{z} = |z| = r^2$$

Rechnen wie in $\mathbb{R}$ mit $i \cdot i = -1$

Summe: $z_1 + z_2 = (a_1 + i b_1) + (a_2 + i b_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

Differenz $z_1 - z_2$ analog

Produkt $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + i b_1)(a_2 + i b_2) = a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i a_2 b_1 - b_1 b_2$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

oder

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}; \quad r_1, r_2 \,|\, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$$

$i\varphi_2 \in \mathbb{C}$

$e^{a+ib} = e^z = \underset{\sim}{e^a} \cdot \underline{e^{ib}}$

$|e^{a+ib}| = e^a$;

Winkel ist nur b

Quotient: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + i b_1}{a_2 + i b_2} \cdot 1 = \dfrac{a_1 + i b_1}{a_2 + i b_2} \cdot \dfrac{a_2 - i b_2}{a_2 - i b_2} = \dfrac{(a_1 + i b_1)(a_2 - i b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$

$$= \underset{\sim}{\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}} + i \underset{\sim}{\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}} =$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

logo, es gilt $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; $z_1 z_2 = z_2 \cdot z_1$; $z_1(z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$

Bew. dass $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$

Taylorreihe $\sin\varphi = \varphi - \dfrac{\varphi^3}{3!} + \dfrac{\varphi^5}{5!} - \dots$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

NR $(i\varphi)^2 = -\varphi^2$

$(i\varphi)^3 = -\varphi^2 \cdot (i\varphi)$

$= -i\varphi^3$

$(i\varphi)^4 = (i\varphi)^3 \cdot i\varphi$

$\varphi \in \mathbb{R}$

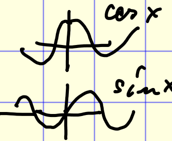
$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{i\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \dots$$

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi}$$

Bem $|e^{i\varphi}| = 1$

analog $\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi + \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)}{2}$



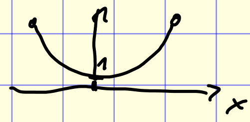
$\cos(-\varphi) = \cos\varphi$

$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$

$= \frac{2\cos\varphi}{2} = \cos\varphi$

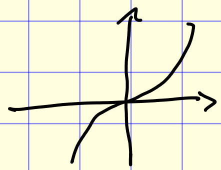
$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$

analog: $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2}$



deswegen ist es logisch zu sagen $\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \cosh x$

$\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \sinh x$



Bem: größer und kleiner macht keinen Sinn

Bew. Annahme $i>0$ dann wäre $i>0 \quad |\cdot i$

$-1>0$ ↯ Widerspruch

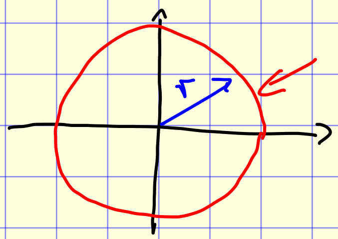
$\Rightarrow$ $i<0$ dann wär $i<0 \quad |\cdot i$ $i<0 \Rightarrow$ aus „>" wird „<"

$-1>0$ ↯

daher $z_1 > z_2$ kein Sinn siehe Bsp $z_1 = i$; $z_2 = 0$

aber $|z_1| > |z_2|$ macht Sinn da $\{|z_1|, |z_2|\} \in \mathbb{R}$

mit $|z_1| = r$ gibt es ∞ viele Zahlen



∀ gilt $|z| = r$