Alle außer Aufgabe 3 ohne Taschenrechner oder Formelsammlung.

1 Elementare Algebra - Vereinfachen Sie

a) $\frac{(t^2-4t+4)(4+t^2+4t)}{(t^2-4)}$ b) $\frac{13}{9}-\frac{1}{63}-\frac{21}{49}$ c) $\frac{3a}{b}:\frac{a}{2b}\cdot\frac{2a}{3b}$

d) $\left(\frac{x^3\cdot y}{n^2\cdot m^3}\right)^5:\left(\frac{x\cdot y^2}{n\cdot m^5}\right)^2$ e) $\sqrt{\left(\sqrt{\sqrt[5]{a^2}}\right)^4\sqrt{b^3}}$ f) $\left(\frac{\sqrt[5]{\sqrt{7x}}}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^{-2}$

Lösung:

a) $\frac{(t-2)^2(t+2)^2}{(t-2)(t+2)}=t^2-4$ b) $\frac{91-27-1}{63}=1$ c) $\frac{4a}{b}$

d) $\frac{x^{13}y}{n^8m^5}$ e)$a^{2/5}b^{3/4}$ f)$\frac{x^{11/10}}{7^{-1/5}}$

2 Gleichungen und Ungleichungen - Bestimmen Sie die Lösungsmenge

a) $8x-(5x+2)=3-(5-2x)$ b) $x^4-2x^2+1=0$ c) $x^2-2x-10\leqslant 5$

d) $-2x^4+2x^3-14x+10>4-7x+x^3(1-2x)$ e) $\frac{x-1}{|x+4|}<1$

Lösung:

a)$x=0$ b)$x=\pm 1$ c) $x\in[-3,5]$

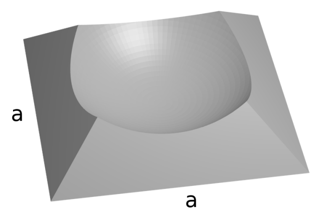
d) $\Leftrightarrow x^3-7x+6>0$

$$x^3-7x+6=(x-2)(x+3)(x-1)\rightarrow\mathcal{L}=]-3,1[\cup]2,+\infty[\qquad (1)$$

e) $x\in\mathbb{R}$

3 Elementare Geometrie

Bestimmen Sie das Volumen sowie die Oberfläche des abgebildeten Körpers in Abhängigkeit von a. Er ergibt sich aus Subtraktion einer Kugel mit Radius $\frac{a}{2}$ von einer Pyramide mit Höhe $\frac{a}{2}$. Der Mittelpunkt der Kugel liegt in der Pyramidenspitze. **Hinweis:** Mehrere solcher Pyramiden können zu einem einfachen größeren Körper zusammengefügt werden. Das Volumen einer Kugel mit Radius R ist $\frac{4}{3}\pi R^3$ und die Oberfläche ist $4\pi R^2$.



Lösung:

Aus sechs der Pyramiden lässt sich ein Würfel zusammensetzen. Dieser umschließt die Kugel komplett. Das gesamte Kugelvolumen kann dann subtrahiert werden.

$V_{\text{Wuerfel}}=a^3\Rightarrow 6\cdot V_{\text{Koerper}}=a^3-\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3=\left(1-\frac{\pi}{6}\right)a^3\Rightarrow V_{\text{Koerper}}\approx 0,079a^3$

Die gekrümmte Fläche berechnet sich aus der Kugeloberfläche zu $\frac{1}{6}4\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi a^2}{6}$

Die Grundfläche ist a^2. Eine der Seitenflächen ist die Dreiecksfläche weniger einem Kreissegment. Der Winkel des Kreissegments beträgt $\tan\phi/2=\frac{a/2}{a/\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\phi\approx 70,53°$. Für die Fläche des Segments gilt:

$A_{\text{Segment}}=\frac{\phi}{360°}\cdot\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\approx 0,154a^2$

Also ist die Seitenfläche: $\frac{a}{2}\frac{a}{\sqrt{2}}-A_{\text{Segment}}\approx 0.2a^2$ und folglich die Oberfläche $A=0.8a^2+a^2+\frac{\pi}{6}a^2\approx 2,32a^2$

4 Winkelfunktionen ohne Taschenrechner

a) $\sin(-\pi/4)$ b) $\cos\left(\frac{11}{2}\pi\right)$ c) $\sin\left(\frac{104\pi}{13}\right)$

Lösung:

a)$-\frac{1}{\sqrt{2}}$ b)0 c) 0

5 Funktionen - Skizzieren Sie

a) $y(x) = 3x + 2$ b) $y(x) = 3x^2 - 2$ c) $A(t) = 5\sin(0.5t + 135°)$

Lösung: c) Nullstellen: $(2n - 1 - 1/2)\pi$, Maxima: $(4n - 1/2)\pi$

6 Gleichungssysteme - Lösen Sie

$x - 2y - z = 0;\ \ x + 3y + z = -1;\ \ -x + 2z = 1 - 2y$
Lösung: $x = -1/5$; $y = -3/5$; $z = 1$

7 Differenzieren Sie

a) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ b) $f(x) = \sqrt{x^5}$ c) $f(x) = \cos\left(\frac{1-x^2}{x}\right)$

8 Integrieren, Berechnen Sie

a) $\int (x^3 - 3x + 4)\, dx$ b) $\int \sin(x/4 + 3) dx$ c) $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

Lösung:

$$c)\ [\sin(\ln(x))]_1^e = \sin(1) - \sin(0) = \sin(1) \tag{2}$$

9 Geometrie im Raum

Begründen Sie rechnerisch, dass das Viereck $ABCD$ mit $A = (-2, -1)$, $B = (2, -2)$, $C = (4, 1)$, $D = (0, 2)$, ein Parallelogramm ist. Lösung:

$$B - A = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = C - D \text{ und } C - A = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0 \tag{3}$$

Viel Spaß beim Lösen. ☺