Vorkurs Rechnen 2024, 23.09.24

1. Elementare Algebra

1.0 Grundbegriffe / Einführung

Mathe als Sprache, Vokabular

Parameter
Variable
Klammer

Bsp. $\{x \in \mathbb{R} \mid e^{\lambda x} \leq 1\}$

Zahl
Menge
Zahlenbereich
Symbol
spezielle Funktion

Menge: Zusammenfassung unterschiedlicher Objekte, jedes Objekt muss eindeutig feststellbar sein, ob es zur Menge gehört

Elemente in der Menge:

Bsp.
- Studierende in HS
- Auto mit Kennzeichen „SB"
- Menge aller guten? Filme
- Menge aller japanischen Filme

Aufzählende Darstellung:

- Zahlen kleiner als 5: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Menge aller Buchstaben im Namen „Anne": $\{A, e, n\}$

Variable: Platzhalter für Objekt, welches verschiedene Werte einer Menge annehmen kann

1.1. Grundrechenarten

1.1.1. Zahlenräume

- natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$; $\mathbb{N}_0$
- reelle Zahlen $\mathbb{R}$
- ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
- komplexe Zahlen $\mathbb{C} = \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
- irrationale Zahlen Bsp. $\pi = 3{,}1415\ldots$
  $e = 2{,}71828\ldots$

1.1.2 Kommaverschiebung und wiss. Schreibweise

große Zahlenbereiche / Größenordnungen

Bsp.: Viskosität η [Pa s]

Wasser (20°C)	0,001 Pa s
Glycerin	1,48 Pa s
Honig	10 Pa s
Bitumen	10^{10} Pa s
Glas	10^{20} Pa s

⇒ Exponentialdarstellung

$m \times 10^n$; $m \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$

am Computer

m E±n ; m e±n

Glas 1e20;

Wasser 1e-3;

$10^0 = 1$

10^3 ≙ 1e+3 ≙ kilo (k) — 10^{-3} ≙ milli (m)

10^6 mega (M) — 10^{-6} ≙ mikro (μ)

10^9 giga (G) — 10^{-9} ≙ nano (n)

10^{12} tera (T) — 10^{-12} piko (p)

10^{15} peta (P) — 10^{-15} femto (f)

Kommaverschiebung:

Bsp. $2,565 \cdot 100 = 2,565 \cdot 10^2 = 256,5$

$98,42 : 10^{-3} = 98,42 \cdot 10^3 = 98\,420$

Zahlen in wiss. Schreibweise

Bsp. $0,000\,000\,3849 = 3,849 \cdot 10^{-7}$

$402600900 = 4,026 \cdot 10^8$

1.1.3. Rechengesetze

- Kommutativgesetz $a+b=b+a$; $a \cdot b = b \cdot a$
- Assoziativgesetz $a+(b+c) = (a+b)+c = a+b+c$

  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$
- Distributivgesetz: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

  $(b-c) \cdot a = ba - ca$

Bsp. $(3f+4s)(2t-d) = (3f+4s) \cdot 2t - (3f+4s) \cdot d = 6ft + 8st - 3fd - 4sd$

1.1.4. Binomische Formeln

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

1.1.5 Proportionalität

zwei verschiedene Größen immer im gleichen Verhältnis

$\Rightarrow$ Dreisatz

1.2. Bruchrechnen

1.2.1. Kürzen und Erweitern

$\rightarrow$ Zähler und Nenner mit gleichem Term ($\neq 0$) multipliziert / dividiert

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b} \; ; \; \frac{a+c}{b} = \frac{k(a+c)}{kb} \neq \frac{ka+c}{b}$$

1.2.2. Addition und Subtraktion

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad+cb}{b \cdot d} = \frac{1}{bd}(ad+cb)$$

1.2.3. Multiplikation und Division

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \; ; \; \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$$

1.3. Prozentrechnung

Prozentsatz $p\% = \frac{p}{100} = \frac{\text{Prozentwert } P}{\text{Grundwert}} \; ; \; p \in \mathbb{R}$

1.4. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Potenzen $\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n\text{-mal}} = a^n$; $n \in \mathbb{N}$; a: Basis, n: Exponent

Potenzgesetze:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$
$$a^x / a^y = a^{x-y}$$
$$a^x b^x = (a \cdot b)^x$$
$$a^x / b^x = (a/b)^x$$
$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^1 = a$; $a^0 = 1$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Bsp.: $(2x^2 \cdot x)^2 \cdot x^{-5}$; $x \neq 0$

$= (2x^3)^2 \cdot x^{-5}$

$= 2^2 x^6 \cdot x^{-5} = 4x$ //

Wurzeln

$\sqrt[n]{a}$; a : Radikand $a \geq 0$
n : Wurzelexponent $n \geq 1$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$; $a \geq 0$, denn $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

- Wurzel von Zahlen ≥ 0, sonst komplexe Zahlen, später

$\sqrt{a^2} = |a|$, $a \in \mathbb{R}$; $\sqrt{a} = a^{1/2}$

Wurzelgesetze

$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$\sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b}$

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{b}} = \sqrt[n \cdot k]{b} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{b}}$

Bsp: $(a+b)^{2/3} \sqrt[3]{(a+b)^4} = (a+b)^{2/3} \cdot (a+b)^{4/3}$
$= (a+b)^{\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)} = (a+b)^2$
$= a^2 + 2ab + b^2$

Bem: was ist 9^{9^9} ?

- Logarithmen: $\log_a b = x$; „Logarithmus b zur Basis a"
$a, b > 0$; $x \in \mathbb{R}$; $b \neq 1$

Spezialfälle $a = 10$; $\log_{10} = \lg \triangleq$ dekadischer Logarithmus
$a = e$; $\log_e = \ln$ = natürlicher Logarithmus

$a^x = b \quad | \log_a$

$\log_a(a^x) = \log_a(b) \Rightarrow x = \log_a(b)$

Welches x liefert $a^x = 1 \Rightarrow x = 0$

Logarithmengesetze:

$\log_c(a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$

$\log_c(a/b) = \log_c a - \log_c b$

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} = \dfrac{\ln b}{\ln a} = \dfrac{\lg b}{\lg a}$

Bsp: $\ln\left(\sqrt[4]{\frac{a^2 c}{b d^2}}\right) = \ln\left(\frac{a^{2/4} c^{1/4}}{b^{1/4} d^{2/4}}\right) = \ln\left(\frac{a^{1/2} c^{1/4}}{b^{1/4} d^{1/2}}\right) = \ln\left(a^{1/2} c^{1/4}\right) - \ln\left(b^{1/4} d^{1/2}\right)$

$= \frac{1}{2}\ln a + \frac{1}{4}\ln c - \frac{1}{4}\ln b - \frac{1}{2}\ln d$

Vorkurs Rechnen 2023

1. Elementare Algebra

1.0. Grundbegriffe / Einführung

Mathematik als Sprache mit Vokabular um Probleme präzise darzustellen

Bsp: $\{ x \in \mathbb{R} \mid e^{\lambda x} \leq 1 \}$

Parameter
Variable
Klammer
Zahl
Symbol
Menge
Zahlenbereich
spezielle Funktion

Menge: Zusammenfassung unterschiedlicher Objekte. Für jedes Objekt muss eindeutig feststellbar sein, ob es zur Menge gehört oder nicht.

Zur Menge gehörende Objekte: Elemente der Menge

Bsp: Studierende im Hörsaal

Autos mit Kennzeichen „SB"

Menge aller guten Filme ↯

Menge aller japanischen Filme

Aufzählende Darstellung

- Zahlen kleiner als 5 : $\{1, 2, 3, 4\}$
- Menge aller Buchstaben im Namen „Anne": $\{A, e, n\}$

Variable: Platzhalter für ein Objekt, welches verschiedene Werte einer Menge annehmen kann

1.1 Grundrechenarten

1.1.1 Zahlenräume

- natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ $\mathbb{N}_0$
- reele Zahlen $\mathbb{R}$
- ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

  $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$
- rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \}$
- komplexe Zahlen $\mathbb{C} = \{ z = a + i \cdot b \mid a, b \in \mathbb{R}, i := \sqrt{-1} \}$
- irrationale Zahlen $\pi = 3{,}1415\ldots$

  $e = 2{,}718\ldots$

1.1.2 Kommaverschiebung und wissenschaftliche Schreibweise

große Zahlenbereiche: Größenordnungen

Bsp: Viskosität η [Pa s]

Wasser (20°C)	0,001 Pa s
Glycerin	1,48 Pa s
Honig	~ 10 Pa s
Bitumen	~ 10^{10} Pa s
Glas	~ 10^{20} Pa s

$\Rightarrow$ Exponentialdarstellung $m \times 10^{n}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{R}$

$m E \pm n$; $m e \pm n$

10^0	1				
10^3	1e+3	kilo (k)	10^{-3}	1e-3	milli (m)
10^6	1e+6	mega (M)	10^{-6}	1e-6	mikro (μ)
10^9	1e+9	giga (G)	10^{-9}	1e-9	nano (n)
10^{12}	1e+12	tera (T)	10^{-12}	1e-12	piko (p)
10^{15}	1e+15	peta (P)	10^{-15}	1e-15	femto (f)

Kommaverschiebung

Bsp: $2{,}565 \cdot 100 = 2{,}565 \cdot 10^2 = 256{,}5$

$98{,}42 : 10^{-3} = 98{,}42 \cdot 10^3 = 98420$

Zahlen in wissenschaftlicher Schreibweise

Bsp. $0{,}000\,000\,3849 = 3{,}849 \cdot 10^{-7}$

$402600000 = 4{,}026 \cdot 10^8$

1.1.3 Rechengesetze

- Kommutativgesetz: $a+b = b+a$; $a \cdot b = b \cdot a$
- Assoziativgesetz: $a + (b+c) = (a+b)+c = a+b+c$

  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$
- Distributivgesetz: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

  $(b-c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$

Vorzeichen und Klammern

Bsp: $(3f+4s)(2t-d) = (3f+4s)2t - (3f+4s)d$

$= 6ft + 8st - 3fd - 4sd$

1.1.4 Binomische Formeln

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

1.1.5 Proportionalität

Zwei verschiedene Größen stehen immer im gleichen Verhältnis zueinander.

$\rightarrow$ Dreisatz

1.2 Bruchrechnen

1.2.1 Kürzen und Erweitern

$\rightarrow$ Zähler und Nenner mit gleichem Term $\neq 0$ multipliziert / dividiert

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b} \quad ; \quad \frac{a+c}{b} = \frac{k\,(a+c)}{k \cdot b} \neq \frac{k \cdot a + c}{b}$$

1.2.2 Addieren und Subtrahieren von Brüchen

$$\rightarrow \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

$$= \frac{1}{b \cdot d} \cdot (a \cdot d + c \cdot b)$$

1.2.3 Multiplizieren und Dividieren von Brüchen

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{bd} \quad ; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a/b}{c/d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

1.3 Prozentrechnung

Prozentsatz $p\,\% = \frac{p}{100} = \frac{\text{Prozentwert } P}{\text{Grundwert } G}$

$p \in \mathbb{R}$

1.4 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

- Potenzen $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} = a^n$, $n \in \mathbb{N}$

a: Basis, n: Exponent

Potenzgesetze

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad a^1 = a; \quad a^0 = 1$$

$$a^x / a^y = a^{x-y}$$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$a^x b^x = (a \cdot b)^x$$

Bsp: $(2x^2 \cdot x)^2 \cdot x^{-5}$ $\quad x \neq 0$

$= (2x^3)^2 \cdot x^{-5}$

$= 2^2 x^6 \cdot x^{-5} = \underline{4x}$

$$a^x / b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

Wurzeln $\sqrt[n]{a}$ $\quad a$: Radikand $\quad a \geq 0$

n: Wurzelexponent $\quad n \geq 1$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}, \quad a \geq 0$$

denn: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

- Wurzeln von Zahlen ≥ 0 (später: komplexe Zahlen)

$\sqrt{a^2} = |a|$, $a \in \mathbb{R}$, $\quad \sqrt{a} = a^{1/2}$

- ungerades $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R} \rightarrow b^n = a$ hat genau eine Lösung $\sqrt[n]{a}$

- gerades $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ $b^n = a$ hat eine positive und eine negative Lösung $b_1 = \sqrt[n]{a} > 0$, $b_2 = -\sqrt[n]{a} < 0$
- gerades $n \in \mathbb{N}$ und $a < 0$ $\quad b^n = a$

  $\rightarrow$ keine reelle Lösung $\quad$ Bsp $x^2 = -1$

  $\rightarrow x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$
- Wurzelgesetze:

$\rightarrow \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

$\rightarrow \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$\rightarrow \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b}$

$\rightarrow \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}$

Bsp: $(a+b)^{2/3} \cdot \sqrt[3]{(a+b)^4} = (a+b)^{2/3} \cdot (a+b)^{4/3}$

$= (a+b)^{\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)}$

$= (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

- Logarithmen $\log_a b = x$

„Logarithmus b zur Basis a"

$a, b > 0$; $x \in \mathbb{R}$, $b \neq 1$

Spezialfälle: $a = 10$ $\quad \log_{10} = \log = \lg$ dekadischer Lg

$a = e$ $\quad \log_e = \ln$ natürlicher Lg

$a^x = b \quad | \log_a$

$\log_a(a^x) = \log_a(b) \Rightarrow x = \log_a(b)$

welches x liefert $a^x = 1 \to x = 0$

Logarithmusgesetze

$$\log_c(a \cdot b) = \log_c(a) + \log_c(b)$$

$$\log_c(a/b) = \log_c(a) - \log_c(b)$$

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} = \frac{\lg(b)}{\lg(a)}$$

$$\log_c(b^a) = a \cdot \log_c(b) \quad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

Bsp: $\ln\left(\sqrt[4]{\frac{a^2 c}{b d^2}}\right) = \ln\left(\frac{a^{2/4} \cdot c^{1/4}}{b^{1/4} \cdot d^{2/4}}\right)$

$= \ln\left(\frac{a^{1/2} \cdot c^{1/4}}{b^{1/4} \cdot d^{1/2}}\right) = \ln\left(a^{1/2} \cdot c^{1/4}\right) - \ln\left(b^{1/4} \cdot d^{1/2}\right)$

$= \ln\left(a^{1/2}\right) + \ln\left(c^{1/4}\right) - \ln\left(b^{1/4}\right) - \ln\left(d^{1/2}\right)$

$= \frac{1}{2}\ln(a) + \frac{1}{4}\ln(c) - \frac{1}{4}\ln(b) - \frac{1}{2}\ln(d)$