Vorlesung 1 - Einführung-Algebra

Friday, 19 September 2025 12:31

1. Elementare Algebra

1.0. Grundbegriffe / Einführung

Mathematik als Sprache mit Vokabular, um Probleme präzise darzustellen

Parameter, Variable

Bsp: $\{ x \in \mathbb{R} \mid e^{\lambda x} \leq 1 \}$

Zahl

Menge, Zahlenbereich, spezielle Funktion

<u>Menge</u>: Zusammenfassung unterschiedlicher Objekte. Für jedes Objekt muss eindeutig feststellbar sein, ob es zur Menge gehört oder nicht.

Zur Menge gehörende Objekte: <u>Elemente</u> einer Menge.

<u>Bsp</u>: Studierende im Hörsaal

Autos mit Kennzeichen „SB" (vorne)

Aufzählende Darstellungen

- Zahlen kleiner als 5 : $\{1, 2, 3, 4\}$
- alle Buchstaben im Namen „Anne": $\{A, e, n\}$

Variable: Platzhalter für ein Objekt, welches verschiedene Werte einer Menge annehmen kann

1.1. Grundrechenarten

1.1.1 Zahlenräume

- natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- reelle Zahlen $\mathbb{R}$ logisch „und"
- rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0 \}$
- ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \}$

  $= \{ 0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots \}$
- irrationale Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ <u>Bsp</u>: $\pi = 3{,}14159265358979\ldots$

  „ohne" $e = 2{,}718$

  $\sqrt{2}$

1.1.2 Kommaverschiebung und wissenschaftliche Schreibweise

1.1.2 Kommaverschiebung und wissenschaftliche Schreibweise

große Zahlenbereiche:

Viskosität η [Pa · s]

Wasser (20°C)	0,001 Pa · s
Glycerin	1,48 Pa · s
Honig	$\approx$ 10 Pa · s
Bitumen	$\approx 10^{10}$ Pa · s
Glas	$\approx 10^{20}$ Pa · s

→ Exponentialdarstellung $m \cdot 10^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{R}$

m E±n ; m e±n

$10^0 = 1$

$10^3 =$ 1e+3	kilo (k)		$10^{-3} =$ 1e−3	milli (m)
$10^6 =$ 1e+6	mega (M)		$10^{-6} =$ 1e−6	mikro (μ)
$10^9 =$ 1e+9	giga (G)		$10^{-9} =$ 1e−9	nano (n)
$10^{12} =$ 1e+12	tera (T)		$10^{-12} =$ 1e−12	piko (p)
$10^{15} =$ 1e+15	peta (P)		$10^{-15} =$ 1e^{-15}	femto (f)

Kommaverschiebung

Bsp: $2{,}565 \cdot 100 = 2{,}565 \cdot 10^2 = 256{,}5$

$98{,}42 : 10^{-3} = 98{,}42 \cdot 10^3 = 98420$

wissenschaftliche Schreibweise: $\underbrace{0{,}000\,000}_{7}\,3849 = 3{,}849 \cdot 10^{-7}$

Komma

$4026\,\underbrace{00000}\, = 4{,}026 \cdot 10^8$

1.1.3 Rechengesetze

- Kommutativgesetz: $a+b = b+a$; $a \cdot b = b \cdot a$
- Assoziativgesetz: $a+(b+c) = (a+b)+c = \underline{a+b+c}$

  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$
- Distributivgesetz: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

  $(b-c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$

Vorzeichen und Klammern

Bsp: $(3f+4s)(2t-d) = (3f+4s)2t - (3f+4s)d$

$= 6ft + 8st - 3fd - 4sd$

1.1.4. Binomische Formeln

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

1.1.5 Proportionalität

Zwei verschiedene Größen stehen immer im gleichen Verhältnis zueinander.

→ Dreisatz

1.2. Bruchrechnen

1.2.1 Kürzen und Erweitern

→ Zähler und Nenner proportional zu gleichem Term $\neq 0$

z.B. $\frac{a}{b}$ mit $a = p \cdot d$, $b = p \cdot e$ $\Rightarrow$ $\frac{a}{b} = \frac{\cancel{p} \cdot d}{\cancel{p} \cdot e}$ → Kürzen

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b}$$

$$\frac{k\,(a+c)}{k \cdot b} \neq \frac{k \cdot a + c}{b}$$

1.2.2. Addieren und Subtrahieren von Brüchen

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{d \cdot a}{d \cdot b} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{1}{d \cdot b} \cdot \left(d \cdot a + c\,b \right) = \frac{d \cdot a + c \cdot b}{d \cdot b}$$

1.2.3 Multiplizieren und Dividieren von Brüchen

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad ; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \underbrace{\frac{a/b}{c/d}}_{\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

1.3. Prozentualrechnung

Prozentsatz $p\,\% = \frac{p}{100} = \frac{\text{Prozentualwert } P}{\text{Grundwert } G}$

$= \frac{1}{100}$ $\qquad$ $\% = \frac{1}{100}$

Bsp

$20\% = 0{,}2$ $\qquad$ $1{,}4\% = 0{,}014$

1.4. Potenzen, Wurzeln, Logarithmus

- Potenzen

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{mal}} = a^n \quad , n \in \mathbb{N}$$

irgendeine Zahl a^x ???

Potenzgesetze

Basis a $\nearrow$ $a^x a^y = a^{x+y}$ $\qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^1 = a$, $a^0 = 1$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^x a^{-y} = a^{x-y}$$

$a^x b^x$ $\swarrow$ Exponent gleich

$$= (a \cdot b)^x$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

<u>Bsp</u>: $(2x^2 \cdot x)^2 \cdot x^{-5}$

$$= 2^2 \cdot (x^2)^2 \cdot x^2 \cdot x^{-5}$$

$$= 4\, x^4 \cdot x^2 \cdot x^{-5} = 4 \cdot x^6 \cdot x^{-5} = 4x$$

x ganze Zahl, y ganze Zahl (>0)

$$\frac{a^x}{b^x} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}^{x-\text{mal}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b\ b}_{x-\text{mal}}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}\ \frac{a}{b} \cdot \ldots\ \frac{a}{b}}_{x-\text{mal}} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{\overbrace{\overset{x-y}{a \cdot a \cdot a} \ldots \cdot \cancel{a}}^{x-\text{mal}}}{\underbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \ldots \cdot \cancel{a}}_{y-\text{mal}}} = a^{x-y}$$

<u>Wurzeln</u>

$\sqrt[n]{a}$ $\qquad$ a: Radikant $\quad a \geq 0$

n: Wurzelpotenz $\quad n \geq 1$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad , \text{denn } \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

<u>Bsp</u>. Quadratwurzel: $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a} = a^{1/2}$; $\underline{\sqrt[2]{x^2} = x^{2/2} = x}$ (falls $x \geq 0$) $\qquad \sqrt{x^2} = |x|$

- Wurzeln von Zahlen ≥ 0 (später: komplexe Zahlen)

$\sqrt{a^2} = |a|$, $a \in \mathbb{R}$

- ungerades $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R} \rightarrow b^n = a$ hat genau eine Lösung $\sqrt[n]{a}$

$\nearrow$ gesucht

- gerades $n \in \mathbb{N}$. $a \in \mathbb{R} \rightarrow b^n = a$ eine positive und eine negative Lösung gesucht

- gerades $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R} \to b^n = a$ eine positive und eine negative Lösung

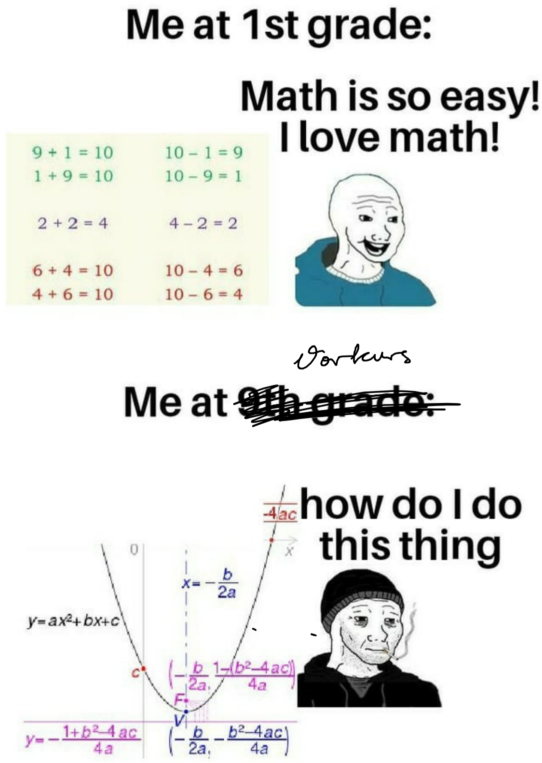
$$b_1 = \sqrt[n]{a} > 0, \quad b_2 = -\sqrt[n]{a} < 0$$

zusammen: $b = \pm \sqrt[n]{a}$

- Wurzelgesetze wie Potenzgesetze (sind Potenzen)

<u>Bsp</u>. $(a+b)^{2/3} = \sqrt[3]{(a+b)^2}$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n\cdot k]{a} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}$$



$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

Vorrechnen 1

Aufgabe 1:

a) $20x^{\cancel{2}}\frac{3x}{5\cancel{x}} - \frac{x(x+6)}{3} = 20x\frac{3}{5}x - \frac{x(x+6)}{3}$

$= x\left(\frac{60}{5}x - \frac{x+6}{3}\right) = x\left(\frac{35}{3}x - 2\right)$

$= x\left(\frac{60\cdot 3x}{5\cdot 3} - \frac{5(x+6)}{5\cdot 3}\right)$

$= x\left(\frac{180x - 5x - 30}{15}\right) = x\left(\frac{175}{15}x - \frac{30}{15}^{2}\right) = x\left(\frac{35}{3}x - 2\right)$

b) $\frac{a^2 - b^2}{a+b} = \frac{(a-b)\cancel{(a+b)}}{\cancel{a+b}} = a - b$,

c) $x^{3y+2}\, 3x^{4y+7}\, 7x^{n-9-7y} = 21x^n$

d) $\left(\frac{x^2 y}{u^2 v^2}\right)^4 : \left(\frac{x y^3}{u^2 v}\right)^2 = \frac{x^6}{u^4 v^6 y^2}$

e) $(-a)^{-2} a = \frac{1}{(-a)(-a)}\, a = \frac{1}{a}$

$(-1\ a)^{-2}$

f) $-1 \cdot a^{-2} a = -\frac{1}{a^{\cancel{2}}}\cancel{a} = -\frac{1}{a}$

g) $\sqrt[5]{32\, z^{10}}$

$= \sqrt[5]{32}\,\sqrt[5]{z^{10}}$

$= 32^{\frac{1}{5}}\left(z^{10}\right)^{\frac{1}{5}} = 2z^2$

h) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^{24}}}$

$= \sqrt[3]{x^6} = x^2$

i) $\frac{x-y}{\ } = \frac{-\cancel{(y-x)}}{\ } = -1$

j) $\frac{2-x}{\ } + \frac{x+1}{\ } - \frac{x+4}{\ } - \frac{2}{\ }$

$= 32^{\cdot}(2^{\cdot})^{\cdot} = 22$

i) $\frac{x-y}{y-x} = \frac{-\cancel{(y-x)}}{\cancel{y-x}} = -1$

j) $\frac{2-x}{4-x^2} + \frac{x+1}{x} - \frac{x+4}{x+2} - \frac{2}{x^2+2x}$

$= \frac{(2-x)\cdot x}{(4-x^2)\cdot x} + \frac{(4-x^2)(x+1)}{(4-x^2)\cdot x} - \frac{x+4}{x+2} - \frac{2}{x^2+2x}$

$= 0$ //

l) $\frac{\lambda^{6n+2}\,\lambda^{3-n}}{(\lambda^2)^n\,(\lambda^{n+3})^2}$

$= \lambda^{n-1}$

k) $\frac{(x^2)^4 - x^{(2^4)}}{x^8} + x^8 = \frac{x^{24} - x^{16}}{x^8\,x^8} + x^8$

$= \frac{x^8}{x^8} - \cancel{\frac{x^{16}}{x^8}} \cancel{+x^8} = 1$

$= 1 \cancel{- x^8} \cancel{+ x^8}$

<u>Aufgabe 2</u>

a) $\frac{2x-1}{2-x} = \frac{7}{3x+4}\ \left(1 - \frac{7}{3x+4}\right) \mid \cdot(3x+4) \mid (2-x)$

$\Leftrightarrow (2x-1)(3x+4) = 7\ (2-x)$

$\Leftrightarrow 6x^2 + 8x - 3x - 4 = 14 - 7x$

$\Leftrightarrow 6x^2 + 12x - 4 = 14$

$\Leftrightarrow 6x^2 + 12x - 18 = 0 \mid :6$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \quad \mid \sqrt{\ }$

„oder"

$\Leftrightarrow x+1 = 2 \ \vee\ x+1 = -2$

$\Rightarrow x \in \{-3, 1\}$

b) $\frac{x+1}{2x-4} = \frac{x+2}{x-2} \quad \mid (x-2) \mid \cdot(2x-4) \quad \Rightarrow x \neq -2$

$(x+1)(x-2) = (x+2)(2x-4)$

$\Rightarrow x = -3$

c) $2 - 3(7-4x) = 5x - 7 + 2(4x+3)$

$\Leftrightarrow 2 - 21 + 12x = 5x - 7 + 8x + 6$

$\Leftrightarrow -19 + 12x = 13x - 1 \quad \mid -12x \quad \mid +1$

$\Leftrightarrow x = -18$

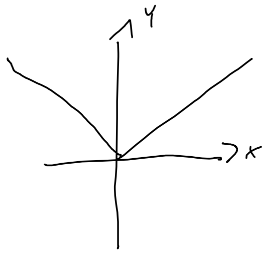
d) $x\,(x-15)(x+23) = 0$

$x \in \{0, 15, -23\}$

e) $\frac{6x-1}{3x+2} = \frac{2x}{x-1}$

$\Leftrightarrow (6x-1)(x-1) = 2x(3x+2)$

$\Rightarrow x = \frac{1}{11}$



f) $\log_{10}(3x+4) = 3 \quad \mid 10^{(\ )}$

$\cancel{10}^{\log_{10}(3x+4)} = 10^3$

$\Leftrightarrow 3x + 4 = 1000 \quad \mid -4 \mid :3$

$\Leftrightarrow x = 332$

g) $|x-1| \leq 1$

$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

$x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

$[1;\infty)$

<u>Fall 1:</u> $x \geq 1$

$x - 1 \leq 1$

$\Leftrightarrow x \leq 2$

<u>Fall 2:</u> $x < 1$

$-(x-1) \leq 1$

$\Leftrightarrow -x \leq 0 \quad \mid \cdot(-1)$

$\Leftrightarrow x \geq 0$

$\Rightarrow x \in [0;2]$

h) $\frac{4}{x-3} \leq 1 \quad \mid (x-3)$

$(x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3 \quad x-3 < 0 \Leftrightarrow x < 3)$

<u>Fall 1:</u> $x > 3$;

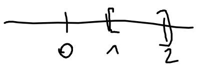
$4 < x - 3 \quad \mid +3$

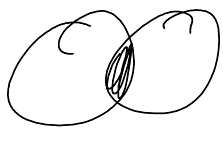
<u>Fall 2.</u> $x < 3$

$4 \geq x - 3 \quad \mid +3$

$x \in \{\ldots\}$ $[\ldots]$ $[\ldots)$ $(\ldots]$ $(\ldots)$ $[$

$x \in [1, 2)$





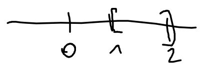
Fall 1: $x > 3$; Fall 2. $x < 3$

$4 \leq x-3 \quad |+3$ $\qquad$ $4 \geq x-3 \quad |+3$

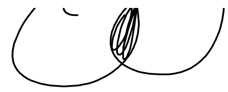
$x \geq 7$ $\qquad$ $\Rightarrow 7 \geq x \quad (x \leq 7)$

$\Rightarrow x \in [7, \infty)$ $\qquad$ $(x \in (-\infty; 7]) \Rightarrow$

$x \in (-\infty, 3)$

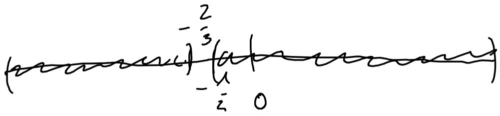


$x \in [1, 2)$



$\frac{x}{2x+1} \xrightarrow{x \to \infty} \frac{1}{2}$

i) $x \in (-\infty; -\frac{2}{3}) \cup (-\frac{1}{2}; \infty)$



$\left((-\infty; -\frac{2}{3}) \cap (-\frac{1}{2}; \infty) = \{\ \} = \emptyset\right)$

j) $x \in (-\frac{16}{5}; -3)$

k) $x \in (-\infty, -7] \cup (-3; \infty)$ $\qquad$ m) $x \in [-3; 1]$

l) $x \in (-\infty, -3) \cup [-1, 3]$ $\qquad$ n) $x \in (-\infty; -5) \cup [-\frac{9}{2}, -3)$

Aufgabe 3.

a) $\dfrac{2{,}7 \frac{\cancel{kg}}{\cancel{dm^3}}}{7{,}3 \frac{\cancel{kg}}{\cancel{dm^3}}} \cdot 4{,}8\,kg \approx 1{,}78\,kg$

„proportional zu"

b) $U = 2\pi R$, $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V \propto U^3$

$m \propto V N \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{U_1^3 N_1}{U_2^3 N_2} \Rightarrow m = 6{,}822\,kg$

$4{,}2\% = 4{,}2 \cdot \frac{1}{100}$
$= 0{,}042$
$\Rightarrow 1{,}042$

c) $K_{2,5} = 10.000 \cdot 1{,}042 \cdot 1{,}042 = 10.857{,}64$

$K_{20} = 10.000 \cdot (1 + \underbrace{z}_{\text{Zinssatz}})^{20} = 20\,000 \quad | : 10.000$

$\Leftrightarrow (1+z)^{20} = 2 \quad | (\ )^{\frac{1}{20}}$

$\Leftrightarrow ((1+z)^{20})^{\frac{1}{20}} = 2^{\frac{1}{20}}$

$\Leftrightarrow 1 + z = 2^{\frac{1}{20}} \Rightarrow z \approx 3{,}53\%$

$z = 0{,}0353$

d) $100 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$ $\qquad$ $1024 = 2^{10}$

Fallunterscheidung.

1 Fall. Anzahl Summanden ist ungerade

$\Rightarrow 100 = u \cdot z = 5 z = 18+19+20+21+22 = 5 \cdot 20$

2 Fall. " " " gerade

$100 = g \cdot \frac{u}{2} = 9+10+11+12+13+14+15+16 = 8 \cdot 12{,}5$