Vorlesung 25.09.24 Funktionen I

3.1 Funktionen

3.1.1 Definition und Eigenschaften

Eine Funktion ist eine Zuordnung, jede Zahl x einer gegebenen Zahlenmenge D auf eine Zahl y einer Zahlenmenge W abbildet.

$$f: D \to W \qquad f(x) \text{ Bild von } x,\ x \text{ Urbild von } f(x)$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

D: Definitionsbereich, W – Wertebereich, $f(x)$ – Bildmenge

Funktionsgleichung explizite Darstellung, Abbildungsvorschrift.

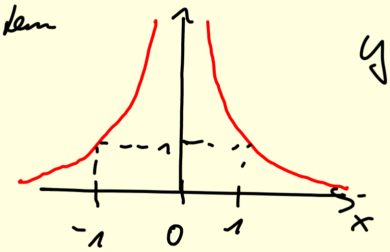
$y = f(x)$; Bsp. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$f(x)$ nicht definiert für $x = 0 \rightarrow$ Definitionslücke

$$f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Graph einer Funktion: Zahlenpaare $(x,y) = (x, f(x))$ mit $x \in D$ als Punkte im Koordinatensystem

Bsp. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

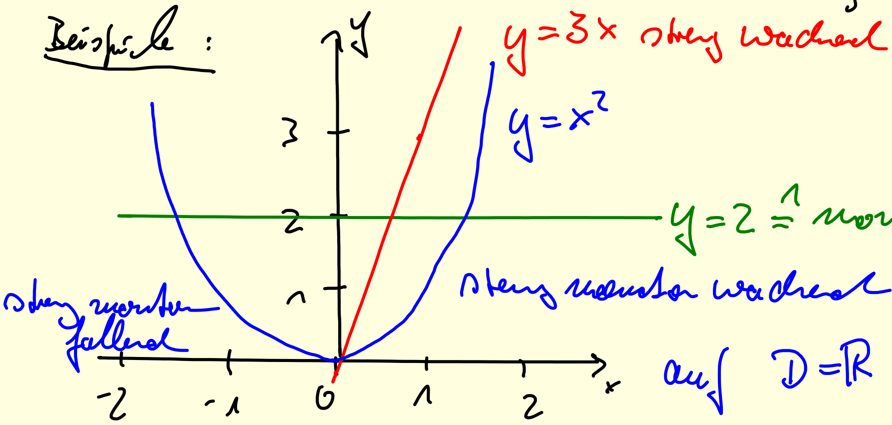


$y = \frac{1}{x^2}$

Monotonie

$y = f(x)$ heißt
- monoton wachsend falls $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$
- streng monoton – " – – " – , $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- monoton fallend – " – ; $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$
- streng monoton – " – – " – ; $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Beispiele:



auf $D = \mathbb{R}$ keine Aussage Monotonie

auf $[0, \infty)$ streng wachsend

$(-\infty, 0]$ streng monoton fallend

Symmetrie

Graph einer Fkt. $y = f(x)$ ist

- symmetrisch zur y-Achse, wenn gilt – Achsensymmetrie

$$f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in D \ ; \ \forall x \in D$$

$\hat{=}$ gerade Funktion

- symmetrisch zum Ursprung. – Punktsymmetrie

$$f(-x) = -f(x) \ ; \ \forall x \in D$$

$\hat{=}$ ungerade Funktion

Bsp: $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = f(x) \Rightarrow$ gerade Funktion

$f(x) = \frac{1}{x}$; $f(-x) = \frac{1}{-x} = -f(x) \Rightarrow$ ungerade Fkt.

Beschränktheit

Funktion ist nach unten/oben beschränkt wenn $f(x)$ nicht kleiner/größer als eine bestimmte Zahl wird,

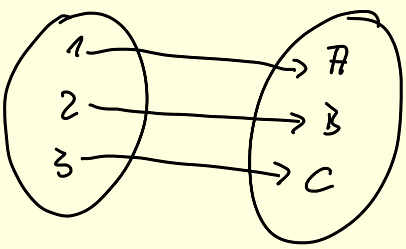
Dann existieren a oder b so, dass $a \le f(x) \le b \ \forall x \in D$

Bsp. $f(x) = x^2 \quad 0 \le f(x)$

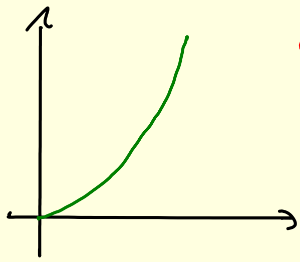
$f(x) = e^x \quad 0 < f(x)$

Injektivität

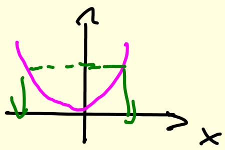
Zu jedem Element y der Zielmenge W gehört höchstens ein Element x der Definitionsmenge D; Eventuell auch gar kein Element.



Bsp. $y(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}^+$



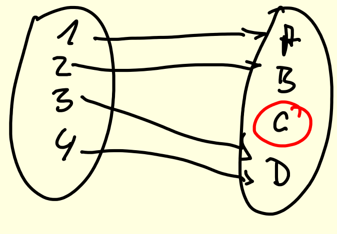
nicht auf $\mathbb{R}$



$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Surjektivität

jedes Element der Zielmenge W hat mindestens ein zugehöriges Element aus der Definitionsmenge D



D

Achtung: Zielmenge $W \neq$ Bild $f(D)$

nicht unbedingt

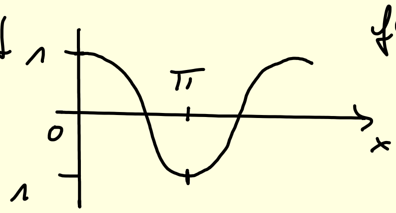
$f(D) \subset W$

$f(D) \begin{pmatrix} A \\ B \\ D \end{pmatrix}$; $W \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}$

Eine Funktion ist stets surjektiv als Abbildung in die Bildmenge als Zielmenge.

Merke: Surjektivität ist Einschränkung des Wertebereichs (≙ Zielmenge)
Injektivität durch Einschränkung des Definitionsbereiches erreichen

Bsp: Surjektivität



$f(x) = \cos(x)$

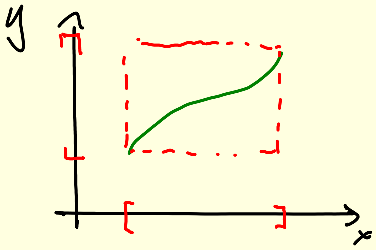
$f: \mathbb{R} \to [-1,1]$ surjektiv $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht surjektiv

$f: [0,\pi] \to [-1,1]$ injektiv

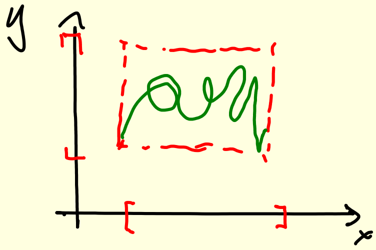
Bijektivität: eine Fkt. ist bijektiv, wenn sie surjektiv und auch injektiv ist

Bsp. $f: [0,\pi] \to [-1,1]$ ist bijektiv
$x \to \cos x$

$f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ ist bijektiv
$x \mapsto x^2$

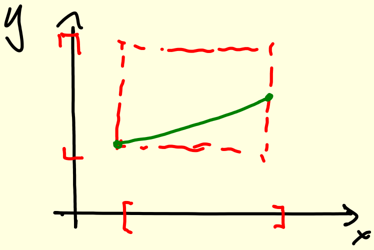


bijektive Funktion

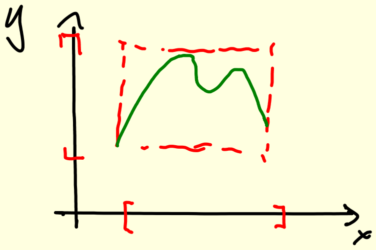


keine Funktion

Verneinung: $\neg$; $\vee$ oder, $\wedge$ und



injektiv und $\neg$ surjektiv
$\Rightarrow$ nicht bijektiv



surjektiv und $\neg$ injektiv
$\Rightarrow$ nicht bijektiv

Umkehrfunktion

durch vertauschen von x und y eine bijektiven Funktion erhält man die Umkehrfunktion,

für jedes x genau ein y → für jedes y genau ein x

surjektivität Injektivität

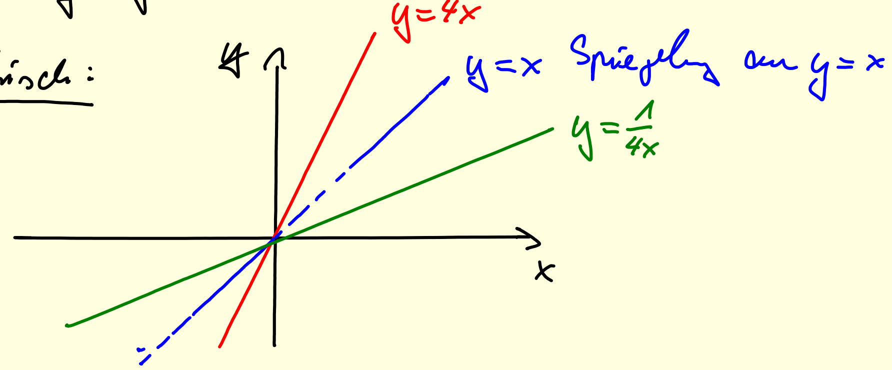
Die Umkehrfunktion nennt man

$$f^{-1}(x) = y \qquad f^{-1} : W \to D$$

es gilt $f^{-1}(f(x)) = x$ Bsp. $y = f(x) = 4x$; $D = W = \mathbb{R} \Rightarrow x = \frac{1}{4y}$

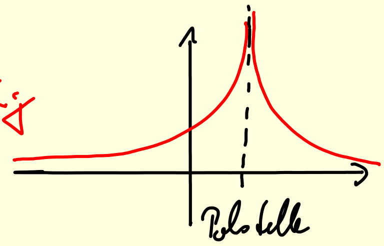
$f(f^{-1}(x)) = x$ $y = f^{-1}(x) = \frac{1}{4x}$; $D = W = \mathbb{R}$

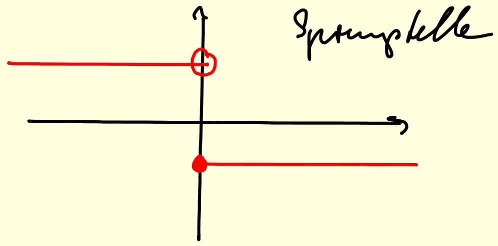
geometrisch:



Stetigkeit: Anschaulich: Man kann den Graph der Fkt zeichnen ohne abzusetzen.

nicht stetig





Genaue Definition mit Grenzwerten:

eine Funktion f ist an der Stelle x=a genau dann stetig, wenn

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

von links $x < a$ von rechts $x > a$

insbesondere f(a) muss existieren (keine Polstellen)

Verknüpfen von Funktionen

$f+g \;;\; x \mapsto f(x)+g(x)$

$f-g \;;\; x \mapsto f(x)-g(x)$

$f\cdot g \;;\; x \mapsto f(x)\cdot g(x)$

$f/g \;;\; x \mapsto f(x)/g(x)$

Verkettung von Funktion

$f\circ g : x \mapsto (f\circ g)(x) = f(g(x))$

$g: X \to Y \quad ; \quad f \; Y \to Z$

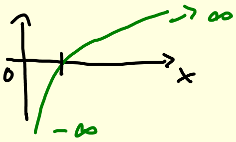
$x \to y = g(x) \quad ; \quad y \mapsto z = f(y)$

$f\circ g ; X \to Z$ auch Änderung des Bereiche

$x \to f(g(x))$

Reihenfolge der Verkettung

Bsp $f:(0,\infty) \longmapsto \mathbb{R} \quad x \to \ln(x)$



$g: \mathbb{R} \to (0,\infty) \quad y \to e^{3y}$

$f(g(y)) = \ln(e^{3y}) = 3y$

$W(g) = D(f) = (0,\infty)$

$g(f(x)) = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$

$W(f) = D(g) = \mathbb{R}$

3.1.2. Elementare Funktionen

algebraische Funktionen — transzendente Funktion

rationale Funktion — irrationalen Funktionen , $e^x, \sin x, \cos x, \cosh(x), \dots$

ganze rationale Fkt: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

gebrochene rat. Funktion $\frac{x}{x+1}$ (echt und unecht $\frac{x^2-1}{x-1}$) $(x+1)(x-1)$

konstante Fkt. $f(x)=2$

lineare Fkt $f(x) = 2+x$

quadratische Fkt. $f(x) = 1+2x+3x^2$