3.1.3 Polynome

Ein Polynom ist eine rationale Funktion, die sich schreiben läßt als

$$f(x) = \underbrace{a_0}_{a_0 \cdot \underbrace{x^0}_{1}} + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n .$$

In diesem Fall nennt man $f(x)$ ein Polynom vom Grad n. ($a_n \neq 0$)

Zudem sollen $a_0, a_1, \dots, a_n = \{a_i\}_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}$

3.1.4 Gebrochen rationale Funktionen

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{p_m(x)} \qquad p_n, p_m : \text{Polynome vom Grad } n, m$$

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0 \;\}\, p_n(x)}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_0 \;\}\, p_m(x)}$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^j}$$

sind Notationen von gebrochen rationalen Funktionen.

Unterscheidung:

$n = m = 1$: gebrochene lineare Funktion $\frac{a_1 x + a_0}{b_1 x + b_0}$

Je nach Grad von Zähler (n) und Nenner (m) unterscheidet man

$n < m$: echt gebrochene rationale Funktion

$n \geq m$: unecht gebrochene rationale Funktion

Analogie: $\mathbb{Q} \ni \frac{p}{q} = \frac{10}{3} = \frac{9}{3} + \frac{1}{3} = \underbrace{3}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{\in \mathbb{Q}}$

Beispiel: $\dfrac{2x^4+3x^3+5x^2-4x+1}{\underbrace{x^2-3x+1}_{f(x)}} \overset{?}{=} \underbrace{g(x)}_{\text{Polynom}} + \underbrace{h(x)}_{\text{Rest echt}}$

$n=4$, $m=2<n \Rightarrow$ unecht

Jede unecht gebrochene rationale Funktion $y=f(x)$ lässt sich als Summe einer ganzen rationalen Funktion $g(x)$ und einer echt gebrochenen rationalen Funktion $h(x)$ darstellen.

$$
\begin{array}{l}
(2x^4+3x^3+5x^2-4x+1):(x^2-3x+1) = 2x^2+9x+30 + \dfrac{77x-29}{x^2-3x+1} \\
-(2x^4-6x^3+2x^2) \\
\hline
0+9x^3+3x^2-4x \\
\quad -(9x^3-27x^2+9x) \\
\hline
\quad 0+30x^2-13x+1 \\
\qquad -(30x^2-90x+30) \\
\hline
\qquad 77x^1-29
\end{array}
$$

$$\underbrace{\frac{2x^4+3x^3+5x^2-4x+1}{x^2-3x+1}}_{f(x)} = \underbrace{2x^2+9x+30}_{g(x)} + \underbrace{\frac{77x-29}{x^2-3x+1}}_{h(x)}$$

Eigenschaften gebrochen rationaler Funktionen

$$y = f(x) = \frac{P_n(x)}{P_m(x)} \equiv \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \left(\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \right)$$

- x_0 ist Nullstelle von $y=f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, wenn $P(x_0)=0$ und $Q(x_0)\neq 0$. $f(x_0)=\dfrac{0}{Q(x_0)}=0$

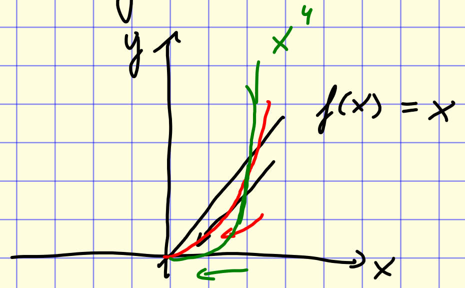
- x_p ist Pol von $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, wenn $Q(x_p)=0$ und $P(x_p)\neq 0$

Ist x_p eine k-fache Nullstelle von $Q(x_p)$ und gilt $P(x_p)\neq 0$, dann heißt x_p Pol k-ter Ordnung

$f(x) = x$ einfache Nullstelle

$f(x) = x^2$ zweifache Nullstelle

$f(x) = x^4$ 4-fache Nullstelle



Linearfaktorzerlegung

$$x^2 = x \cdot x \qquad x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$$

ein Polynom $p_n(x)$ lässt sich in $\mathbb{C}$ komplett in Linearfaktoren zerlegen.

komplexe Zahlen damit auch in $\mathbb{R}$??

$$(x^2 - 2x + 1) = (x-1)^2 = (x-1)(x-1)$$

Notation: $p_n(x) = \underbrace{(x - x_1)}_{l_1(x)} \cdot \underbrace{(x - x_2)}_{l_2(x)} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(x - x_n)}_{l_n(x)}$

Grad $n \rightarrow n$ Linearfaktoren

$$l_j(x) = 0 \Rightarrow p_n(x) = 0$$

falls k Nullstellen gleich sind, dann kann man diese in der Notation zusammenfassen.

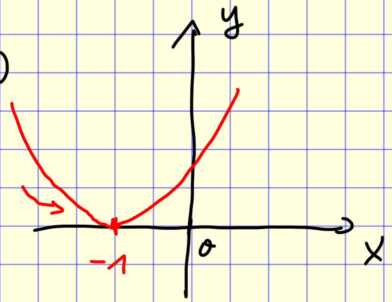
$$p_n(x) = (x - x_1) \cdot \underbrace{(x - x_2)^k}_{k\text{-fache Nullstelle}} \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

allgemeiner

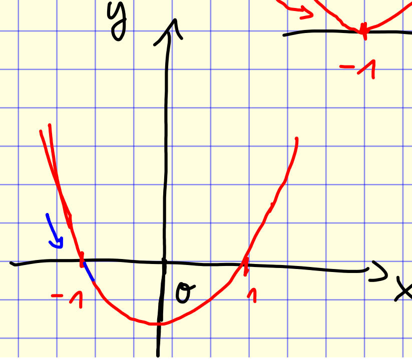
$$p_n(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_m)^{k_m}, \quad m \leq n$$

Bsp: $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = (x+1)(x+1)$

-1 ist 2-fache Nullstelle



$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$



$$\frac{1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{2-fache Polstelle}$$

- $P(x)$, $Q(x)$ sind teilerfremd, wenn alle Nullstellen verschieden sind

$$x = x_1 \Rightarrow P(x_1) = 0 \quad \text{und} \quad Q(x_1) \neq 0$$

$$x = x_2 \Rightarrow P(x_2) \neq 0 \quad \text{und} \quad Q(x_2) = 0$$

dann ist $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ die Normalform der gebrochenen rationalen Funktion mit den Nullstellen von $P(x)$ und Polstellen als Nullstellen von $Q(x)$.

Denn: Falls x_0 existiert mit $P(x_0) = Q(x_0) = 0$,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x-p_1)(x-p_2)\cdots\cancel{(x-x_0)}}{(x-q_1)(x-q_2)\cdots\cancel{(x-x_0)}}$$

dann lässt sich der Linearfaktor kürzen.

Bsp: $n=2$, $m=2$

$$\frac{x^2-1}{x^2+2x+1} \rightarrow \text{Linearfaktorzerlegung / Nullstellenform} \quad \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$$

- Asymptoten einer gebrochenen rationalen Funktion sind Geraden, denen sich der Funktionsgraph im Grenzwertverhalten nähert

z.B. Polstellen; $y = 0$ $(e^{-x}, \frac{1}{x})$

$x=0$ als Polstelle

Asymptotenfunktionen: Funktionen, denen sich Funktionen nähern

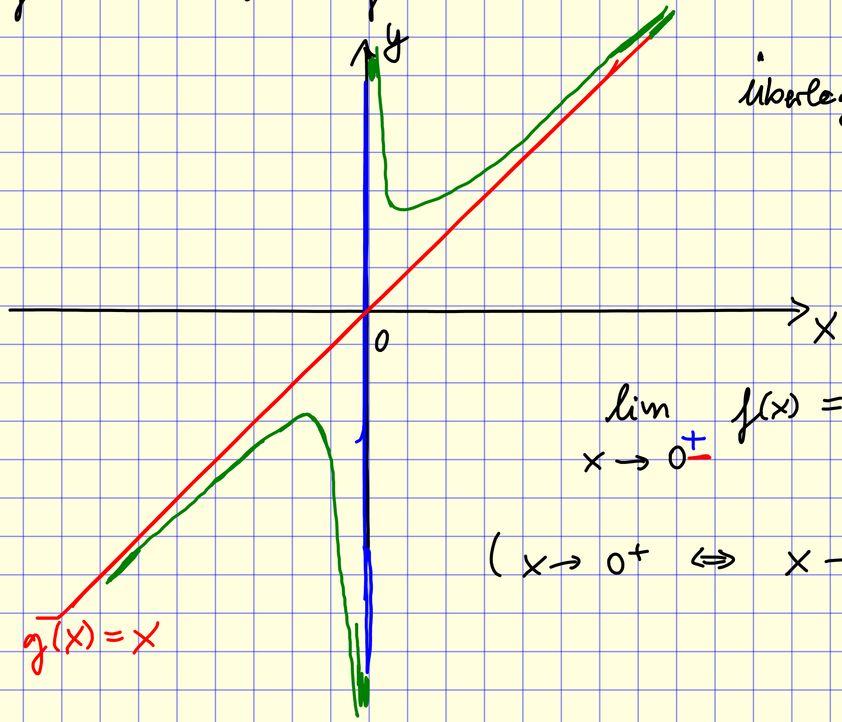
z.B. $x + \frac{1}{x} = f(x)$, $x \to 0$ Polstelle: $x = 0$

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{x}_{\to\infty} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} = \lim_{x\to\infty} x$$

Bsp: $x = 1000$

$$\Rightarrow f(x) = 1000 + \frac{1}{1000} = 1000{,}001$$

$f(x)$ nähert sich für $x \to \infty$ der Funktion $g(x) = x$ an.



Überlegung: $x + \frac{1}{x} = f(x)$

$x \to \infty \Rightarrow f(x) > x$

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to 0^{\pm}} x + \frac{1}{x} = \pm\infty$$

$(x \to 0^+ \Leftrightarrow x \to 0 \text{ und } x > 0)$

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \text{grad}(P(x)) = n, \quad \text{grad}(Q(x)) = m$$

$n < m$: x-Achse ist Asymptote

Bsp: $\frac{(x^2+3x+1)\frac{1}{x^3}}{(2x^3-2x^2+x-4)\frac{1}{x^3}} \overset{x \neq 0}{=} \frac{\left.\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right\} \to 0}{\left.2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right\} \to 2}$

für $x \to \infty$, $x > 0$

Zähler $\to 0$, Nenner $\to 2$, Funktion $\to 0$

$n = m$: zur x-Achse parallele Gerade $y = \frac{a_n}{b_m} = \frac{a_n}{b_n}$

Grund: $\frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_0} \underset{x \neq 0}{=} \frac{a_n + \ldots + \frac{a_k}{x^{n-k}} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}}{b_n + \ldots + \frac{b_k}{x^{n-k}} + \ldots + \frac{b_0}{x^n}} \xrightarrow[x \to \infty]{} \frac{a_n}{b_n}$

$n > m$: so gilt $y = f(x) = g(x) + h(x)$

ganze rationale ($g(x)$), echt gebr. rat. ($h(x)$)

$h(x)$ verhält sich wie $n < m$: $\lim_{x \to \infty} h(x) \to 0$

PD

$$= \frac{2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 1}$$

$$= 2x^2 + 9x + 30 + \frac{77x - 29}{x^2 - 3x + 1}$$

PBZ

ist Asymptotenfunktion von $f(x)$

„Näherung von $f(x)$ für $x \to \infty$ bzw. $x \gg 1$"

Partialbruchzerlegung

- Zerlegung einer gebrochen rationalen Funktion in eine Summe von „Brüchen"

  ↑ Partialbrüche: möglichst nur noch lineares Polynom im Nenner

- jede echt gebrochen rationale Funktion $(n < m)$ kann eindeutig in eine Summe von Partialbrüchen zerlegt werden.

  (von Partialbrüchen mit Nennergrad 1 in $\mathbb{C}$)

  gilt das auch in $\mathbb{R}$?? :

$$y = f(x) = \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0}$$

Ziel: auf diese Form bringen:

$$f(x) = \frac{A_1}{(x - x_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(x - x_2)^{k_2}} + \ldots + \frac{A_q}{(x - x_q)^{k_q}}$$

(ideal: $k_i = 1$)

mit x_i Nullstellen der Vielfachheit k_i des Nennerpolynoms

Vorgehen: anhand von Beispiel

$$f(x) = \frac{6x^2 - 4}{2x^3 + 4x^2 + 4x + 2}$$

$\underset{3}{m} > \underset{2}{n}$? ✓

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$$

Nullstellen von $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \overset{!}{=} 0$

$x_1 = -1 \quad \rightarrow \quad$ Polynomdivision

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x+1) \cdot \underbrace{(x - x_2)(x - x_3)}_{\text{Rest}} \quad \Big| : (x+1)$$

$$(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) : (x+1) = (x+1)\underbrace{(x^2 + x + 1)}_{?}$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} \Rightarrow \text{keine LFZ möglich in } \mathbb{R} \text{ !!}$$

$$\frac{3x^2 - 2}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} \overset{!}{=} \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

ein Grad weniger als Nenner

$$= \frac{A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x+1)}{(x^2 + x + 1)(x+1)}$$

Nenner sind gleich

$\Rightarrow$ Zähler gleich: $3x^2 - 2 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x+1)$

$$0x + 3x^2 - 2 = \underbrace{(A+B)}_{=3}x^2 + \underbrace{(A+B+C)}_{=0}x + \underbrace{A+C}_{=-2}$$

$$A + B = 3, \quad A + B + C = 0, \quad A + C = -2$$

$$\Rightarrow A = 1, \quad B = 2, \quad C = -3$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{2x - 3}{x^2 + x + 1}$$

maximale Vereinfachung in $\mathbb{R}$!!