Wer viel Spaß hat lebt viel
wer viel lebt schafft viel. ?! :)

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{p_m(x)} \qquad n \geq m$$

$$= g_e(x) + h(x) \quad , \quad h(x) = \frac{p_i(x)}{p_j(x)} \quad , \quad j > i$$

$$x \to \infty : \quad h(x) \to 0$$

$$\Rightarrow f(x) \to g_e(x) \qquad \text{Asymptotenfunktion}$$

$h(x)$ kann vereinfacht werden durch PBZ

$$= \frac{A_1}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(x-x_2)^{k_2}} + \dots$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{p_n(x)}{p_m(x)}\,dx = \underline{\int g_e(x)\,dx} + \int \frac{A_1}{\underline{(x-x_1)^{k_1}}}\,dx$$

$$+ \int \frac{A_2}{\underline{(x-x_2)^{k_2}}}\,dx + \dots$$

ganze Zahlen $\mathbb{Z}$;

rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} ; p,q \in \mathbb{Z} \}$

$\pi = 3{,}14159265358979\ldots$

$\frac{1}{3} = 3{,}3333\ldots$

irrationale Funktionen : $2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots$ bis ∞!

3.1.5 Irrationale Funktionen

<u>Bsp</u>: $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

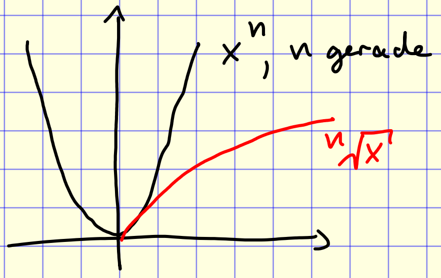
<u>Wurzelfunktionen</u>

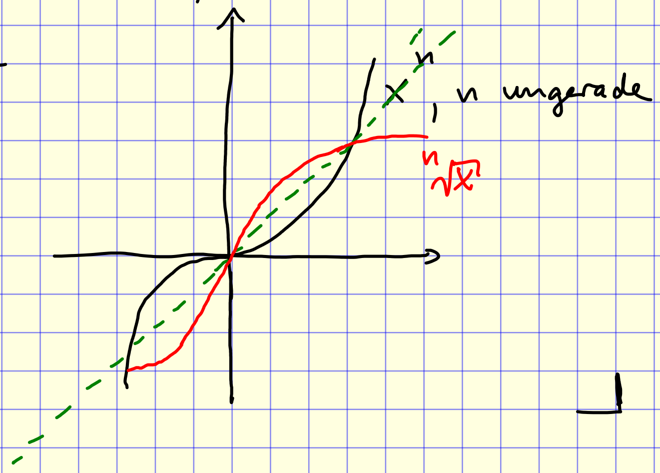
D für Wurzelfunktion

$D = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \}$ für gerade n

$D = \mathbb{R}$ für ungerade n

$\ulcorner$ Umkehrfunktion zu x^n: $\sqrt[n]{x}$, denn $\sqrt[n]{x^n} = x \vee |x|$





$\lrcorner$

für ungerade n ist $\sqrt[n]{x}$ Umkehrfunktion der Potenzfunktion x^n.

für gerade n ——"——

mit $x^n = f$
$f: [0,\infty) \to [0,\infty)$

<u>Exponentialfunktion</u>

$y = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+$

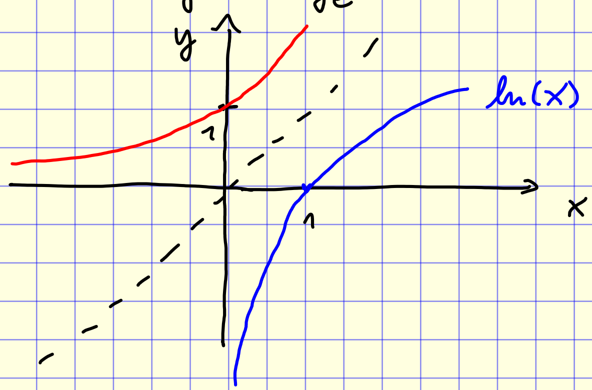
Spezialfall: $a = e$ Eulerzahl $2{,}718\ldots$ $y = e^x$, $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}^+$

<u>Logarithmus</u>

$y = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$

$= \dfrac{\log(x)}{\log(a)}$

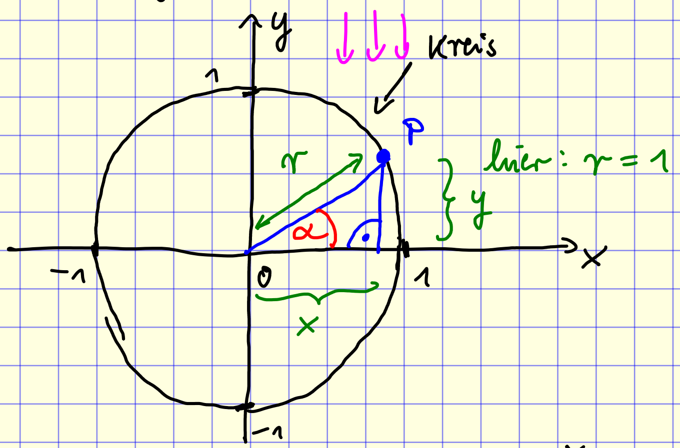
für $a = e$ $y = \log_e(x) = \ln(x)$ $D = \mathbb{R}^+$ $W = \mathbb{R}$



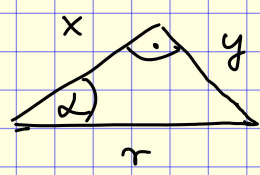
es handelt sich außerdem bei e^x und $\ln(x)$ auch um transzendente Funktionen.

4. Trigonometrie

4.1. Trigonometrische Funktionen



Jedem Punkt auf dem Einheitskreis ordnen wir ein rechtwinkliges Dreieck zu. (Durch Projektion auf die x-Achse) Den Winkel zwischen Hypotenuse und x-Achse nennen wir α.



Das Gradmaß

α in Grad (°) $\quad 0° \leq \alpha < 360°$ oder $-180° < \alpha \leq 180°$

Ursprung: historisch, Hexagesimalsystem

Ein Grad wird unterteilt in 60 Winkelminuten und 3600 Winkelsekunden.

Das Bogenmaß

Verhältnis von Umfang U zu Durchmesser d $\quad U = \pi \cdot d$

$$\underline{\pi = \frac{U}{d}} = 3{,}1415\ldots \quad \text{Kreiszahl}$$

Man gibt α in Radianten an (rad) $\quad 0 \leq \alpha < 2\pi$

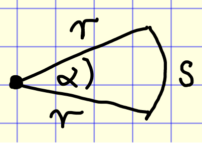
$$-\pi < \alpha \leq \pi$$

Umrechnung

$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}2958°$$

$$1° = \frac{2\pi}{360} \text{ rad} \approx 0{,}01745 \text{ rad}$$

Bogenlänge eines Kreissegments

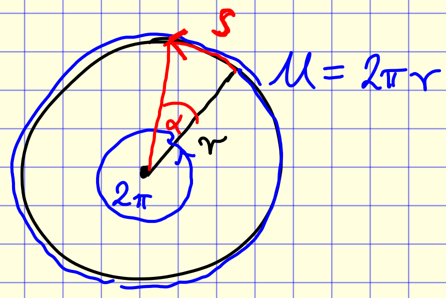


$s = r \cdot \alpha \qquad [\alpha] = \text{rad}$

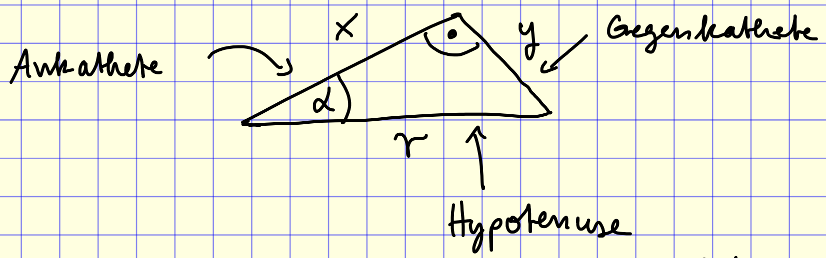
$$U = 2\pi r$$

$$\frac{s}{U}$$

$$\frac{s}{U} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow s = \underbrace{\frac{U}{2\pi}}_{r} \alpha$$



Definitionen: trigonometrische Funktionen



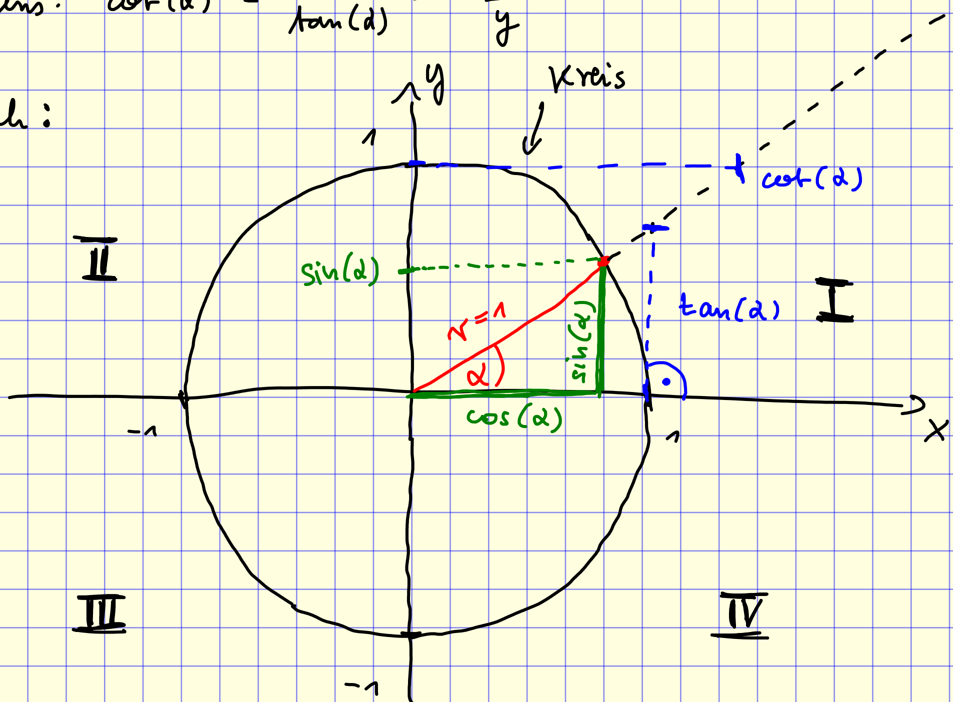
Sinus: $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{y}{r}$

Cosinus: $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{x}{r}$

Tangens: $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{y}{x}$

Kotangens: $\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{x}{y}$

geometrisch:

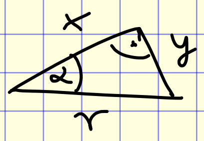


Vorzeichen trigonometrischer Funktionen

Quadrant	sin	cos	tan	cot
I	+	+	+	+
II	+	−	−	−
III	−	−	+	+
IV	−	+	−	−

Beziehungen für gleiche Winkel und Umrechnungsformeln

Satz des Pythagoras: $x^2 + y^2 = r^2$

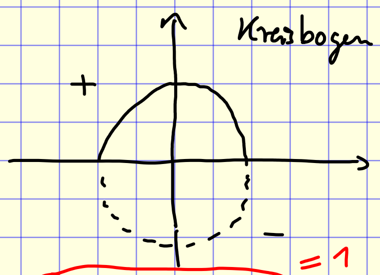


$r = 1 \Rightarrow x = \cos(\alpha), \; y = \sin(\alpha)$

$(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = 1^2$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

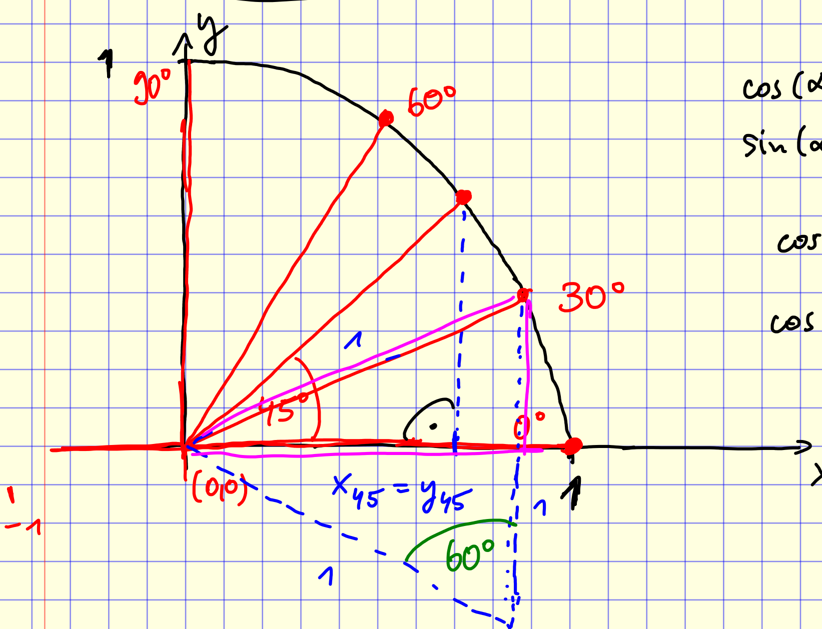
$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} \iff y = \pm\sqrt{1 - x^2}$



$1 + \tan^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\underbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}_{=1}}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

analog: $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

Spezielle Winkel / Stützstellen

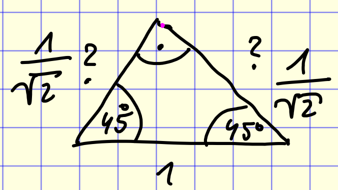


$\cos(\alpha) = \frac{x^{=1}}{r} \Rightarrow \cos(0°) = 1, \; \sin(0°) = 0$

$\sin(\alpha) = \frac{y^{=0}}{r}$

$\cos(90°) = 0, \; \sin(90°) = 1$

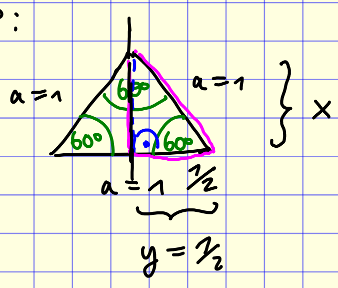
$\cos(180°) = -1, \; \sin(180°) = 0$



$a^2 + a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2}$

$\sin(45°) = \cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

30°:



$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \; y = \frac{1}{2}$

$\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(30°) = \frac{1}{2}$

$60°$ analog $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(60°) = \frac{1}{2}$

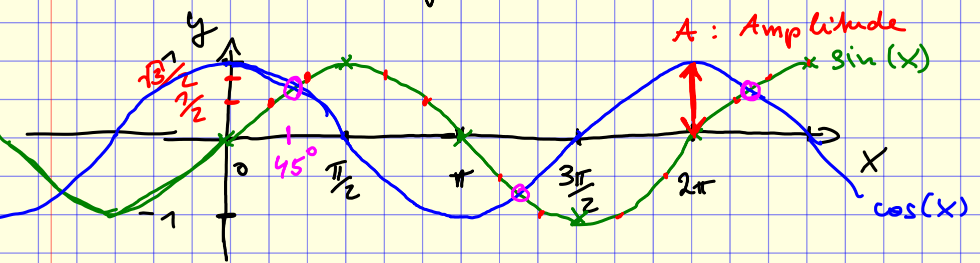
Wertetabelle

I $0 \leq \alpha < 90°$

α Gradmaß Bogenmaß	$0°$ 0	$30°$ $\pi/6$	$45°$ $\pi/4$	$60°$ $\pi/3$	$90°$ $\pi/2$
$\sin(\alpha)$	$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\tan(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

II – IV : gleich mit entsprechendem Vorzeichen

4.2 Graphen trigonometrischer Funktionen



Sinusfunktion

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$, Wertemenge $W = [-1, 1]$

Periode $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ „Periode 2π"

(allgemein : periodische Funktion $f(x+a) = f(x)$)

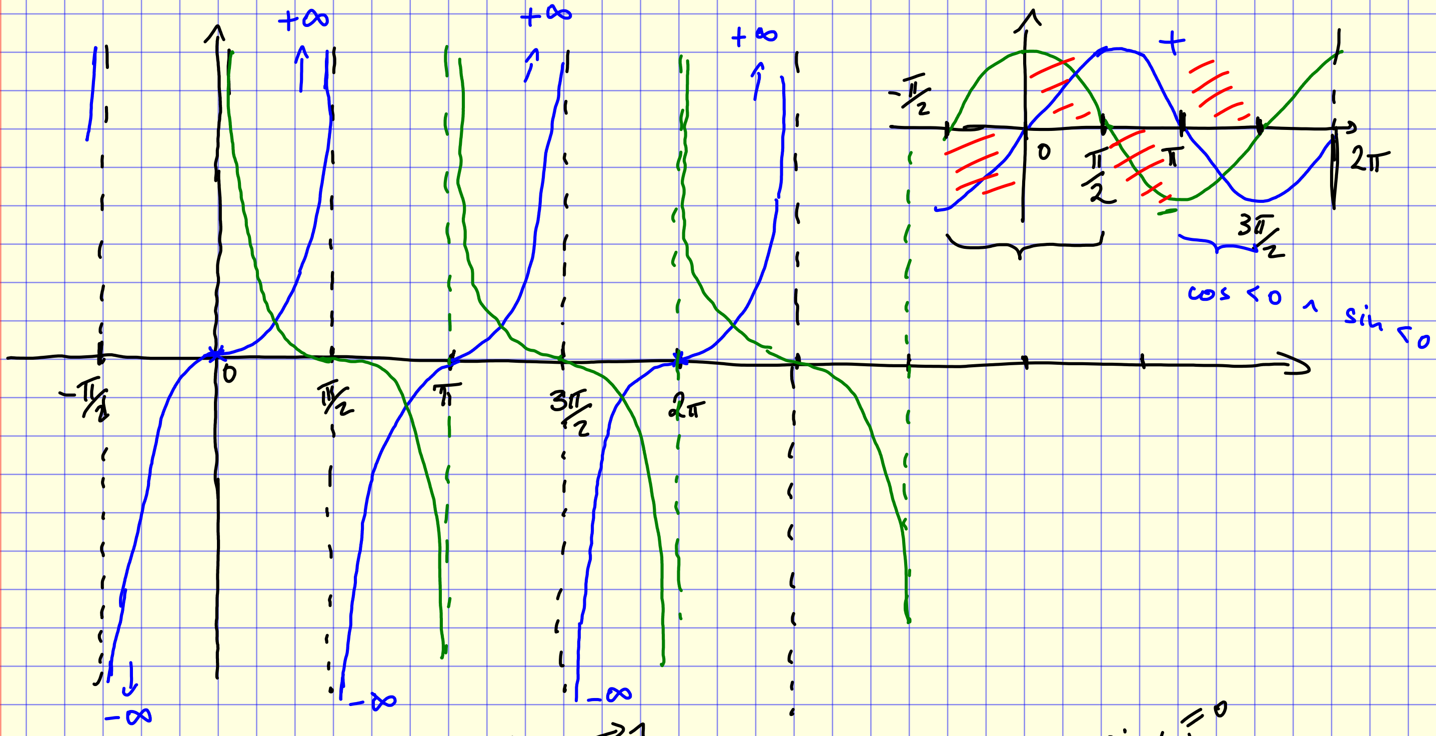
Amplitude $= 1$, $|\sin(x)| \leq 1$ beschränkt

$\sin(-x) = -\sin(x)$ Punktsymmetrie Ursprung

$\cos(-x) = \cos(x)$ Achsensymmetrie y-Achse

Kosinusfunktion

Analog zu Sinus, alles gleich außer Symmetrie



$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{\mp}} \tan(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{\mp}} \frac{\sin(x)\to 1}{\cos(x)\to 0} = \pm\infty \qquad \tan(0) = \frac{\overbrace{\sin(0)}^{=0}}{\underbrace{\cos(0)}_{=1}} = 0$$

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^{\pm}} \tan(x) = \mp\infty$$

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R} \setminus \underbrace{\{ \tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}}_{\text{Polstellen } x_p}$

$$\lim_{x\to x_p^{\pm}} \tan(x) = \mp\infty$$

Asymptoten: x_p (Geraden $x = x_p$)

Periode : π ! weil sich Vorzeichen aufheben!

<u>Kotangensfunktion</u> : $\sin(x) = \cos(x - \tfrac{\pi}{2})$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{-\sin(x-\frac{\pi}{2})}{\cos(x-\frac{\pi}{2})}$$

verschoben gegenüber $\tan(x)$ um $\frac{\pi}{2}$ und mit Faktor -1

$$D = \mathbb{R} \setminus \underbrace{\{ k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \}}_{x_p}$$