4.3. Additionstheoreme

Winkelvielfache

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin\alpha \cos\alpha$$

$$\sin(3\alpha) = 3 \sin\alpha - 4 \sin^3\alpha$$

$$\vdots$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) \, dx$$

Summen / Differenzen von Winkeln

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha$$

$$\sin(\beta-\alpha) = \sin(-(\alpha-\beta)) = -\sin(\alpha-\beta) = \sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \underline{\sin\alpha\sin\beta} \quad (1)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \underline{\sin\alpha\sin\beta} \quad (2)$$

$(2) - (1) \rightarrow \sin\alpha \sin\beta$

Zusammen:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\underbrace{\alpha \pm \beta}_{\text{Summe}}) = \underbrace{\cos\alpha \cos\beta}_{\text{Produkt}} \mp \sin\alpha \sin\beta$$

Produkte trigonometrischer Funktionen

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

Potenzen

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\alpha)\right)$$

$$\sin^3\alpha = \frac{1}{4}\left(3\sin\alpha - \sin(3\alpha)\right)$$

Beweis Additionstheoreme:

↳ geometrisch → Übung!

$z \in \mathbb{C}$

↳ komplexen Zahlen / komplexe e-Funktion $e^z \leftrightarrow \sin(x), \cos(x)$

5. Lineare Algebra

5.1 Vektoren

Definition: Vektor

Ein Vektor ist ein Element eines Vektorraums.

In einem zu einem K-Vektorraum K^n gehörigen n-dimensionalen Koordinatensystem kann ein Vektor durch n Komponenten dargestellt werden, die in einer Spalte oder Zeile aufgelistet werden.

K: Körper z.B. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

Spaltenvektor　　　　Zeilenvektor

$$a_i \in K \;,\; b_i \in K \;,\; \vec{a} \in K^n ,\; \vec{b} \in K^n$$

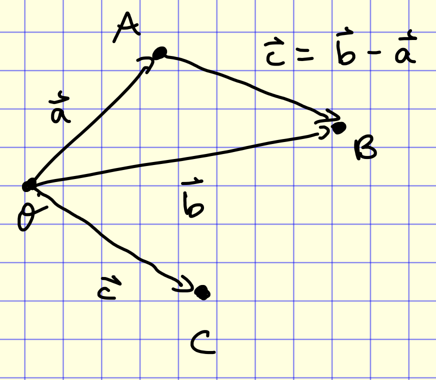
Jedem Vektor kann ein Punkt im Raum eindeutig zugeordnet werden. Zu diesem Punkt ist der Vektor der <u>Ortsvektor</u>.

$$\vec{a} \longrightarrow A\,(\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_n}_{\text{Koordinaten des Punktes } A})$$

Ortsvektor $\leftrightarrow$ <u>Relativvektor / Richtungsvektor</u>

verbinden Punkte im Raum.

Jeder Relativvektor im $\mathbb{R}^3$ ist auch Ortsvektor zu einem dritten Punkt.



<u>Definition:</u> Der zu $\vec{a}$ <u>transponierte</u> Vektor $\vec{a}^T$ ist gegeben durch

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Spaltenvektor Zeilenvektor

$$(\vec{a}^T)^T = \vec{a}$$

<u>Vektorrechenregeln</u>

$$(\vec{a}+\vec{b})_i = a_i + b_i$$

$+$ in K^n $+$ in K ✓

insgesamt: $\vec{a}+\vec{b} = \vec{c}$ erneut ein Vektor!

Addition: komponentenweise

$$(\alpha \vec{a})_i = \alpha a_i \qquad \alpha \vec{a} = \vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix} \text{ erneut ein Vektor}$$

Multiplikation mit einem $\underbrace{\text{Skalar}}_{=\text{Zahl}}$ komponentenweise.

Im $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{C}^3$ definiert man

<u>Kreuzprodukt</u> $\vec{a} \times \vec{b}$

<u>Spatprodukt</u> $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

<u>Skalarprodukt</u> $\vec{a} \cdot \vec{b}$

5.2. Spezielle Produkte von Vektoren

A: <u>Das Skalarprodukt</u>

Definition: für $\vec{a} \in K^n$, $\vec{b} \in K^n$ ist

$$\underline{\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in K$$

als Element von K ein Skalar.

<u>Bsp:</u> $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2$

$= a_1^2 + a_2^2$

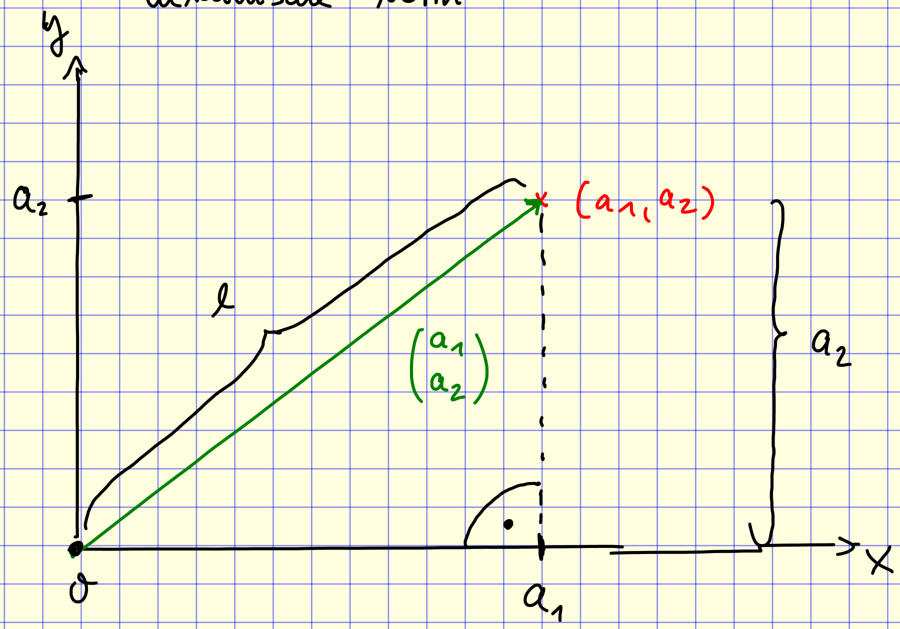
<u>Spezialfall</u>: $\vec{a} \cdot \vec{a} = \sum_i a_i a_i = \sum_i a_i^2$

$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2$

Über das S-Produkt mit sich selbst definieren wir eine Norm → Betrag von $\vec{a}$

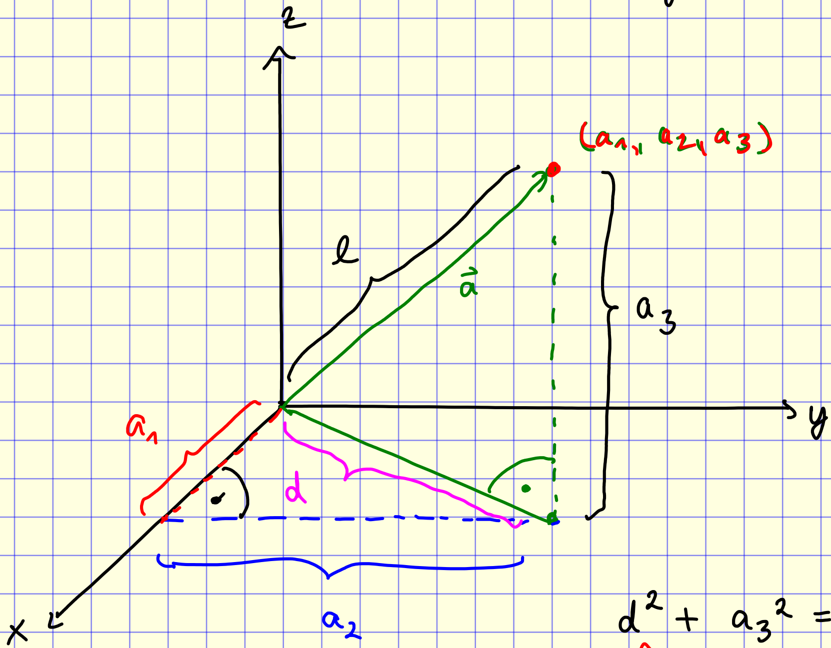
$$|\vec{a}| \equiv \sqrt{\sum_i a_i^2} = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} \geq 0 \quad \text{für } a \in \mathbb{R}^n$$

↳ euklidische Norm



Satz des Pythagoras: $l^2 = a_1^2 + a_2^2 \Rightarrow l = \sqrt{\underbrace{a_1^2 + a_2^2}_{\vec{a}\cdot\vec{a}}} = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

Euklidische Norm entspricht Länge des Vektors



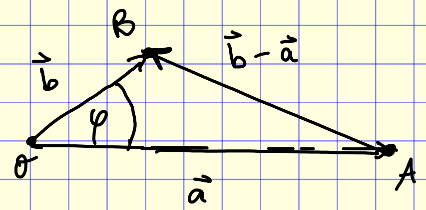
$$d^2 + a_3^2 = l^2$$

und $\quad a_1^2 + a_2^2 = d^2$

$$\Rightarrow \underbrace{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}_{\vec{a}\cdot\vec{a}} = l^2$$

Geometrische Bedeutung des allgemeinen Skalarprodukts

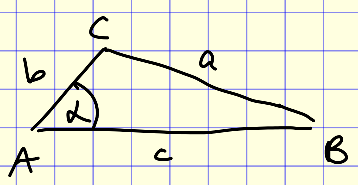
$\vec{a}, \vec{b}, \ \vec{b}-\vec{a}$ bilden ein beliebiges Dreieck



In diesem Dreieck gilt der Kosinussatz

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = \underline{|\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos(\varphi)}$$

[



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos(\alpha)$$

]

Berechne $|\vec{b}-\vec{a}|^2 = (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

Distributivgesetz Skalarprodukt

$$\underbrace{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})}_{??\ \text{Distr. in } K^n\ ???} = \underbrace{a_1(b_1+c_1)}_{\text{Distr. in } K} + a_2(b_2+c_2) + a_3(b_3+c_3)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1+c_1 \\ b_2+c_2 \\ b_3+c_3 \end{pmatrix} = \underline{a_1b_1} + \underline{a_1c_1} + \underline{a_2b_2} + \underline{a_2c_2} + \underline{a_3b_3} + \underline{a_3c_3}$$

$$= \underbrace{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}_{} + \underbrace{a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3}_{}$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$$

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = (\vec{b}-\vec{a})^2 = \vec{b}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}^2$$

Kosinussatz: $\vec{b}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}^2 = \underbrace{|\vec{b}|^2}_{\vec{b}^2} + \underbrace{|\vec{a}|^2}_{\vec{a}^2} - 2|\vec{b}||\vec{a}|\cos\varphi$

$$\cancel{\vec{b}^2} - 2\,\underline{\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}}} + \cancel{\vec{a}^2} = \cancel{\vec{b}^2} + \cancel{\vec{a}^2} - 2\,|\vec{b}||\vec{a}|\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

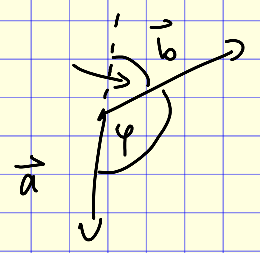
$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}}$$

<u>Winkelformel</u>

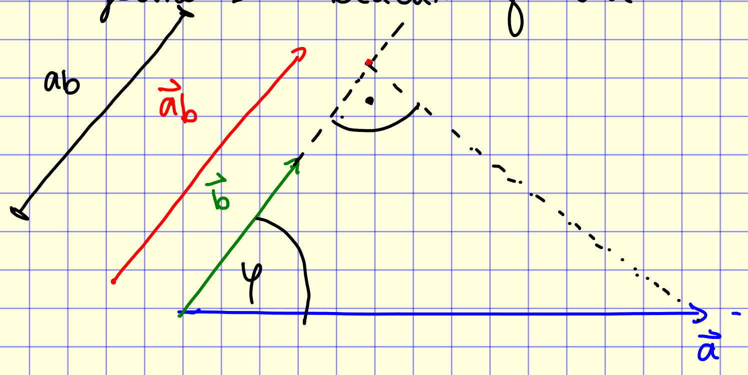
Sei $\varphi = \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ der Winkel zwischen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Dann gilt: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

<u>Achtung:</u> Taschenrechner liefert auch Gegenwinkel!!



↳ geometrische Bedeutung von $\vec{a}\cdot\vec{b}$



a_b: Komponente von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$

$\vec{a}_b$: Projektion von $\vec{a}$ in Richtung von $\vec{b}$

(1) rechtwinkliges Dreieck: $\dfrac{a_b}{|\vec{a}|} = \cos(\varphi) = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

(2) Winkelformel: $\cos(\varphi) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow \frac{a_b}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \Rightarrow a_b = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$a_b = \vec{a}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Das Skalarprodukt ist eine Projektion des Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$. Aufgrund $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ auch umgekehrt!

Der Vektor $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ ist <u>normiert</u>. Ein normierter Vektor hat Länge 1.

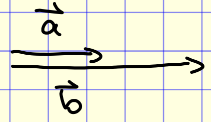
$$\left|\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right| = \sqrt{\frac{\vec{b}^2}{|\vec{b}|^2}} = \sqrt{\frac{|\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2}} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}|} = 1$$

Projektion in Richtung eines Vektors

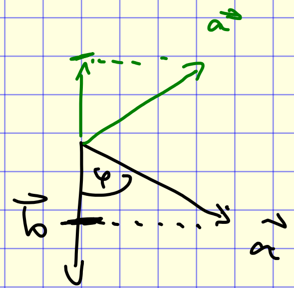
$$\vec{a}_b = \underbrace{\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}}_{\text{Richtung}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)}_{\text{Komponente } a_b = |\vec{a}_b|}$$

Eigenschaften des Skalarprodukts

- $\vec{a} \parallel \vec{b} \wedge \varphi = 0° \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = a\cdot b$
- $\vec{a} \parallel \vec{b} \wedge \varphi = 180° \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = -a\cdot b$



- $\vec{a} \perp \vec{b} \wedge \varphi = 90° = 270° \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ → Test ob $\vec{a} \perp \vec{b}$



- $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) < 90° \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} > 0$
- $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) > 90° \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} < 0$
- $\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, $|\vec{a}|$ Norm / Länge
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$
- $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

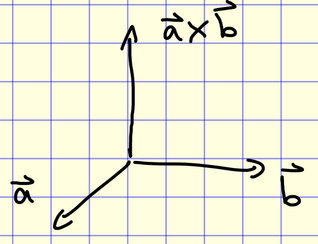
B: Kreuzprodukt / Vektorprodukt

Definition: Das KP zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ (oder $\mathbb{C}^3$) ist gegeben durch

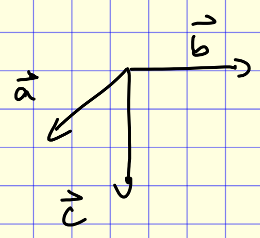
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

geometrische Bedeutung

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}, \vec{b}$ Beweis: Übung durch Skalarprodukt
2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem in dieser Reihenfolge

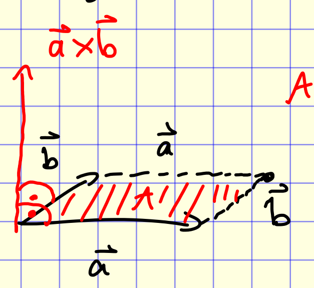


„rechtshändig"



„linkshändig" Bsp: $\vec{a}, \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b}$

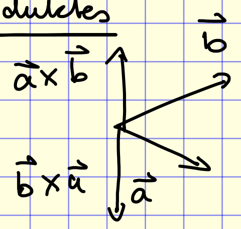
3. $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelograms.



$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Eigenschaften des Kreuzproduktes

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$



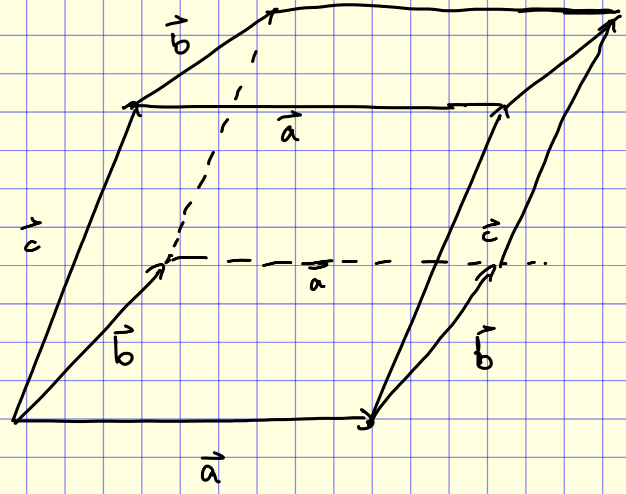
keine Kommutativität

- $\vec{a} \times (\alpha \vec{b} + \beta \vec{c}) = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) + \beta(\vec{a} \times \vec{c})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$ BAC − CAB
- $(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{b}\vec{c})(\vec{a}\vec{d})$ Lagrange-Identität
- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ Jacobi-Identität

Beweis: Übung

C: Spatprodukt

Für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet man $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \in \mathbb{R}$ als das Spatprodukt. Der Betrag $|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$ ist das Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Spats.



$\vec{b}$
$\vec{a}$
$\vec{c}$
$\vec{c}$
$\vec{a}$
$\vec{b}$
$\vec{b}$
$\vec{a}$