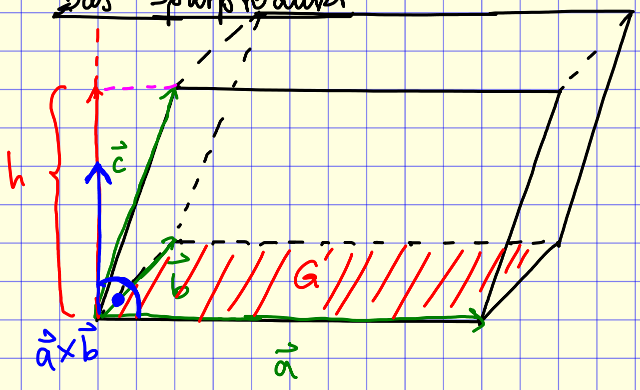
Das Spatprodukt



$V_{spat} = G\cdot h$

$G = |\vec a\times\vec b|$

$$c_{(\vec a\times\vec b)} = \frac{\vec a\times\vec b}{|\vec a\times\vec b|}\cdot\vec c = h$$

$$V_{spat} = |\cancel{\vec a\times\vec b}|\cdot\frac{\vec a\times\vec b}{|\cancel{\vec a\times\vec b}|}\cdot\vec c = (\vec a\times\vec b)\cdot\vec c \quad \text{Spatprodukt}$$

- Invarianz bezüglich zyklischer Vertauschung

$$(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c = (\vec c\times\vec a)\cdot\vec b = (\vec b\times\vec c)\cdot\vec a \neq (\vec a\times\vec c)\cdot\vec b$$

- $(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c > 0$, falls $\vec a,\vec b,\vec c$ rechtshändig, ansonsten < 0

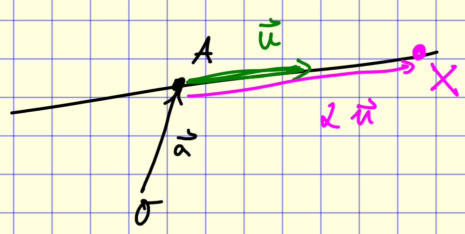
$\rightarrow$ orientierte Volumen (wie orientierte Fläche von $\vec a\times\vec b$)

Richtung !!

5.3. Geraden und Ebenen

A. Geradengleichungen $\quad \vec x\in G \iff \vec x = \vec a + \alpha\cdot\vec u$ ← Richtungsvektor

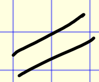
Ortsvektor des Aufpunkts



Schnitte von Geraden

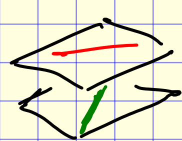
g,h mit Schnittmenge S

$\mathbb{R}^2$: ① $g\neq h$, g,h parallel $\Rightarrow S = \{\,\}$



② $g = h \Rightarrow S = g = h$

③ eindeutige Lösung: $S = \{\vec s\}$



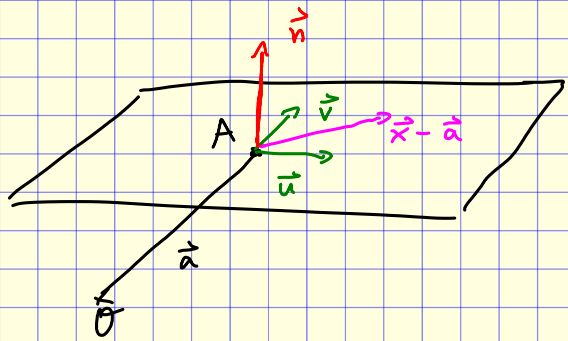
$\mathbb{R}^3$: ①,②,③ analog ④ windschief: g,h nicht parallel

aber in parallelen Ebenen

B Ebenengleichungen

Parameterform: $\vec{x} \in E \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{a} + \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$

$$\vec{u} \neq \lambda \vec{v}$$



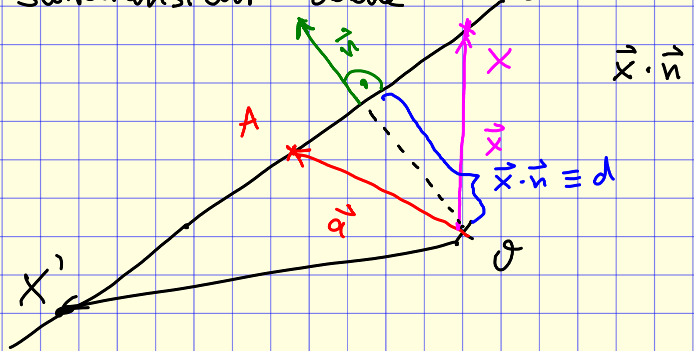
Normalenform: $\vec{n} = \dfrac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$

$$\vec{x} \in E \Leftrightarrow (\vec{x}-\vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$$

↳ Hessesche Normalenform

$(\vec{x}-\vec{a})\vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n} = d$ $\quad d$: Abstand zum Ursprung

Seitenansicht Ebene



↳ Koordinatenform

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = d \Rightarrow x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 = d$$

Hessesche Normalenform in Parameterform?

Hintergrund: Parameterform: $\vec{a} + \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \rightarrow \vec{n} = \dfrac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$

$\rightarrow$ Hessesche Normalenform einfach!

Umkehrung nicht so einfach: $\vec{x}\vec{n} = d \rightarrow \vec{u}, \vec{v}$?

Vorgehen

1. Finde einen Punkt, der $\vec{x} \cdot \vec{n} = d$ erfüllt wähle: $x_1 = 0$, $x_3 = 0$

bspw: $x_i = 0$ außer für ein i: $\cancel{x_1 n_1} + \overset{\neq 0}{x_2 n_2} + \cancel{x_3} n_3 = d$

$x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 = d \qquad \Rightarrow x_2 = \dfrac{d}{n_2}$

Bsp: Punkt 1 : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ d/n_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_1 + \underline{x_2 \cdot 2} + x_3 \cdot \underline{(-3)} = 4$

$x_2 = 0 = x_3$

$\rightarrow x_1 = 4$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Finde einen zweiten Punkt

$\rightarrow$ <u>Differenz zwischen Punkten</u> liefert Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$

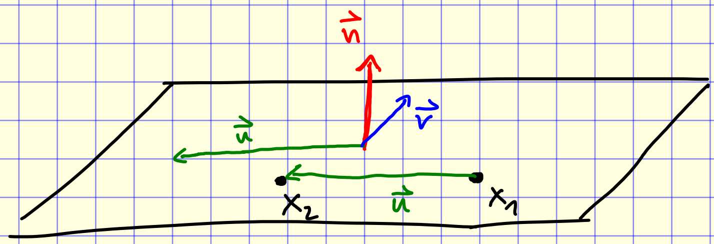
3. Richtungsvektor $\vec{v}$

$\swarrow$ dritter Punkt

$\searrow$ $\vec{v} = \vec{u} \times \vec{n}$

$\vec{n} \cdot \vec{y} = 0$

$y_1 \cdot n_1 + y_2 \cdot n_2 + y_3 \cdot n_3 = 0$



Bsp:

$y_1 + y_2 \cdot 2 + \overbrace{y_3 \cdot (-3)} = 0$

$y_1 = y_2 = y_3 = 0$ schlecht!

$y_3 = 0$

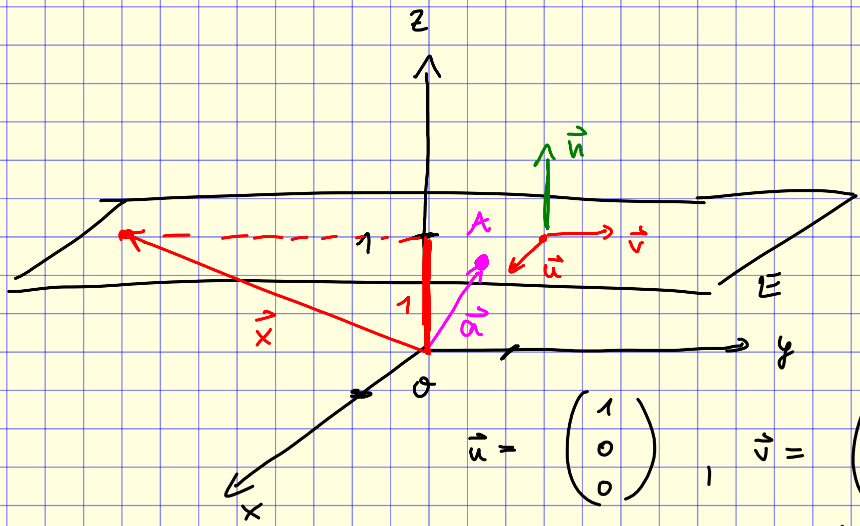
$y_1 + y_2 \cdot 2 = 0$

$y_2 = 1 \Rightarrow y_1 = -2$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \vec{u} \times \vec{n} = \vec{v}$

Beispiel: Hessesche Normalenform;



$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{n} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$|\vec{n}| = 1$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$E: \quad \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{x} \cdot \vec{n} = d$, $d = 1$ $\quad \vec{x} \cdot \vec{n} = 1$, $x_3 \cdot 1 = 1$, $x_3 = 1$

Hinweis: Nur wenn $|\vec{n}| = 1$, ist d der Abstand zum Ursprung ansonsten ist $d = (|\vec{n}| \cdot$ Abstand zum Ursprung$)$

5.4. Lineare Abbildungen

Definition: Eine Abbildung $f: V \to V'$ zwischen K-Vektorräumen V, V' heißt lineare Abbildung, falls gilt

(i) $f(a+b) = f(a) + f(b)$ für $a, b \in V$

(ii) $f(\alpha a) = \alpha f(a)$ für $a \in V$, $\alpha \in K$, $V = K^n$

z.B. $V = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3, \mathbb{C}^{16}$

(i) und (ii) lassen sich zusammenfassen zu

$$f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b) \qquad \alpha, \beta \in K, \ a, b \in V$$

Folgerung: Ist f lineare Abbildung, so gilt $f(0) = 0$

Beweis: $f(0) = f(\underbrace{a-a}_{0 \in V}) = \underbrace{f(a) - f(a)}_{0 \in V'} = 0$

Beispiele lineare Abbildung

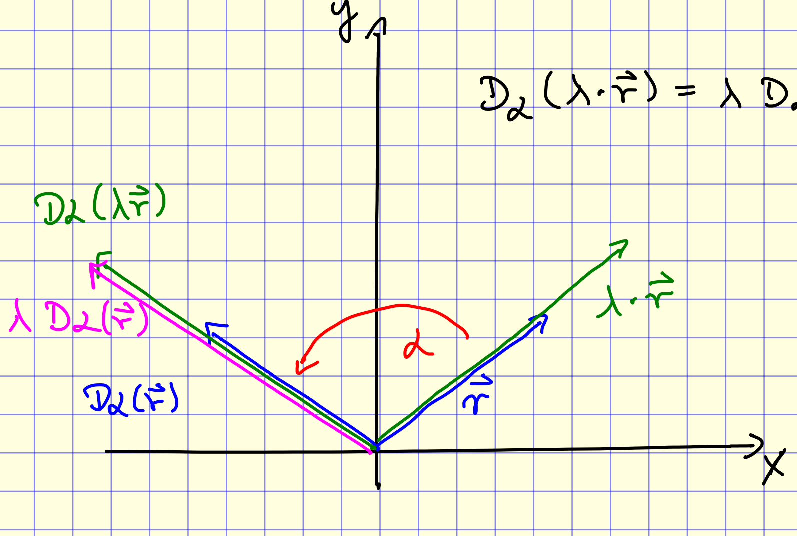
- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x$, $\quad f(x) = a \cdot x \quad a \in \mathbb{R}$

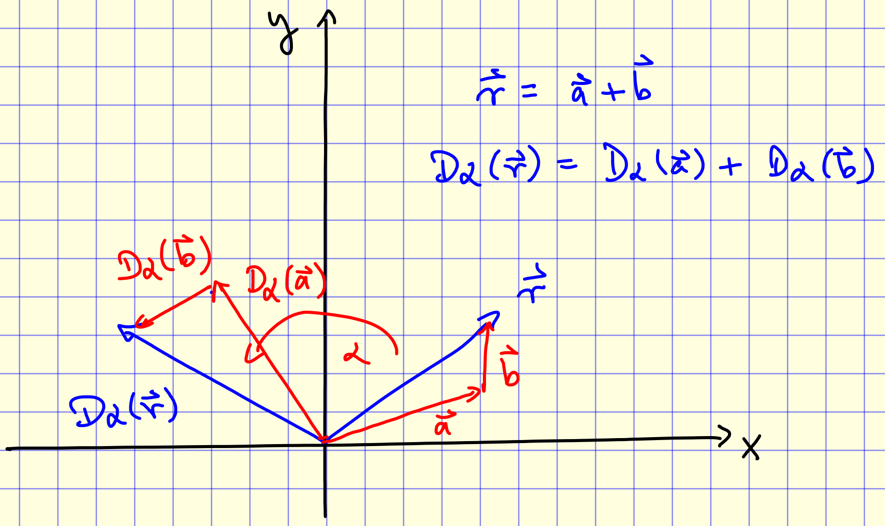
  Achtung: lineare Funktion $\neq$ lineare Abbildung

  $f(x) = ax + b$, $b \neq 0$ $\qquad f(\alpha x) = a \alpha x + b \neq \alpha a x + \alpha b$
  $= \alpha f(x)$

- $\mathbb{R}^2$: Drehung um den Ursprung $D_\alpha(\vec{r})$ um Winkel α

$$D_\alpha(\lambda \cdot \vec{r}) = \lambda D_\alpha(\vec{r})$$





<u>Geometrische Interpretation</u>

Streckung vor oder nach Drehung $\to$ gleiches Ergebnis!

Addition: egal, ob man Summanden dreht oder Summe

<u>5.5 Matrizen</u>

Es sei K ein Körper (z.B. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Zu $m, n \in \mathbb{N}$ ist das System

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$a_{ij} \in K$

allgemein $A \in K^{m \times n}$

eine Matrix.

a_{ij} sind die Elemente der Matrix, auch <u>Matrixelemente</u>.

Vektoren sind Matrizen aus $\underbrace{\mathbb{R}^{1 \times n}}_{\text{Zeilenvektor}}$ oder $\underbrace{\mathbb{R}^{n \times 1}}_{\text{Spaltenvektor}}$

<u>Rechenregeln für Matrizen</u>

1. $A + B = C$ mit $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ für alle i, j

   Bedingung: Dimensionen m, n gleich $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

   <u>elementweise</u> Addition

2. $\alpha A = B$ mit $b_{ij} = \alpha\, a_{ij}$

   Elementweise Multiplikation mit einem Skalar α

3. Matrixmultiplikation

$$A \cdot B = C \qquad c_{ij} = \sum_k a_{ik}\, b_{kj}$$

k läuft durch Zeile von A und Spalte von B

nur möglich, falls $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times n} \Rightarrow C \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Assoziativgesetz: $(A \cdot B) \cdot C = A(BC)$

Explizit: Matrixmultiplikation

$$2 \downarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ $\qquad$ $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32} & a_{11} b_{13} + \ldots \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{33} b_{32} & a_{21} b_{13} + \ldots \end{pmatrix}$$

$C \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$

Faßt man die Elemente der Matrizen zu Zeilen- und Spaltenvektoren zusammen

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,T} \\ \vec{a}_2^{\,T} \end{pmatrix} \qquad B = \left(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 \right)$$

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_i \text{ analog}$$

so stehen im Produkt die Skalarprodukte

$$C = A \cdot B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3 \\ \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

außerdem: Das Skalarprodukt von Vektoren ist das Matrixprodukt von Zeilen und Spaltenvektor!

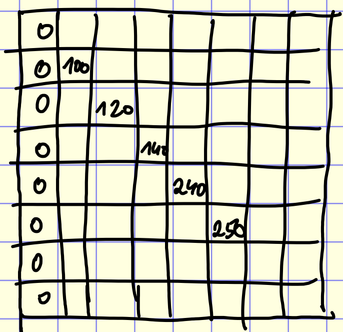
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \vec{a}^T \cdot \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = c_{11}$$

$\vec{a}^T \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ $\quad$ $\vec{b} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ $\quad$ $c \in \mathbb{R}^{1\times 1} = \mathbb{R}$

uint 8 $\quad 2^8 \quad 0, \ldots, 255$

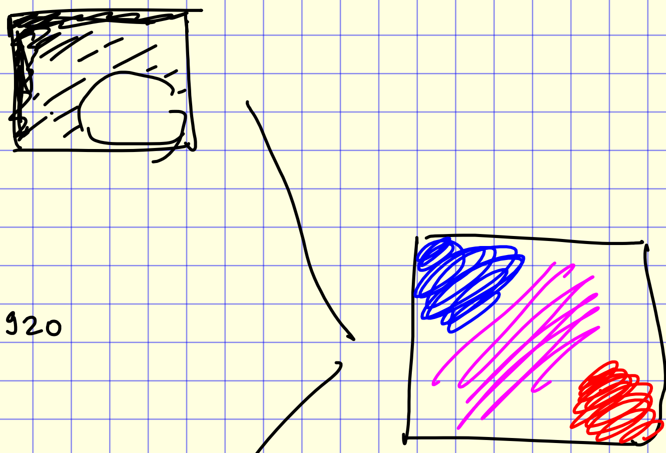
R



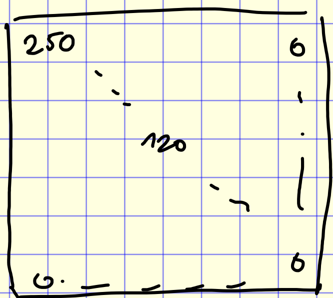
1080

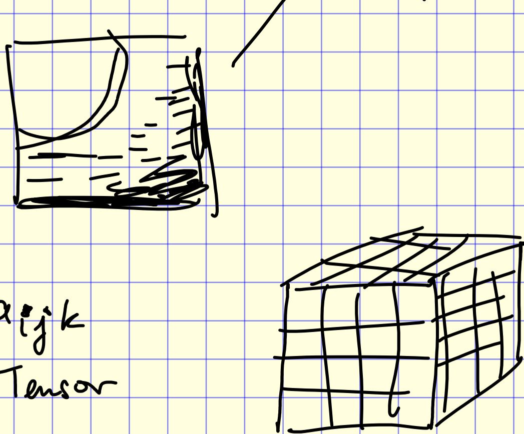
1920

$\in \mathbb{N}_0^{1080\times 1920}$



B





a_{ij} $\quad$ a_{ijk}

Matrix $\rightarrow$ Tensor

Vektoren $\nearrow$

Wirkung einer Matrix auf einen Vektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{pmatrix}$$

$$\cancel{\vec{r}\cdot A} = \overset{1}{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}} \cdot \overset{2}{\begin{pmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{pmatrix}}$$

$$A\cdot\vec{r} = \overset{3}{\begin{pmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{pmatrix}} \cdot \overset{3}{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}a_x x + a_y y + a_z z\\ b_x x + b_y y + b_z z\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\vec{a}\cdot\vec{r}\\ \vec{b}\cdot\vec{r}\end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{r}$ wird auf die Zeilenvektoren projiziert!

Definitionen

Die Matrix $\mathbb{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist die Einheitsmatrix des $\mathbb{R}^{3\times 3}$

$$\mathbb{1}\,\vec{x} = \vec{x} \quad \text{und} \quad \mathbb{1}\cdot A = A\,\mathbb{1} = A, \quad A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

denn: Projektion von $\vec{x}$ auf Basisvektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Satz:

a) Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definiert mit $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ eine lineare Abbildung $A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha A\vec{x} + \beta A\vec{y}$

b) Jede lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ kann als Matrix dargestellt werden!

Drehung: $D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Scherung: $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$