5.5 Lineare Gleichungssysteme

Motivation: Abbildung $A\vec{x} = \vec{y}$

Frage: $\vec{y}$ bekannt, welches $\vec{x}$?

Wie können wir $\vec{x}$ finden? Umkehrung

Definition

Für $a_{ij} \in K$ und $b_i \in K$

wobei $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$

nennt man das System

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} m \text{ Gleichungen}$$

ein lineares Gleichungssystem mit Koeffizienten a_{ij} und den Unbekannten $x_1, \dots, x_n$.

Bsp: (1) $x_1 + 2x_2 = 0$

(2) $3x_1 - x_2 = 4$

traditionell: $x_1 = -2x_2$

einsetzen in (2) $-6x_2 - x_2 = 4$

$\Rightarrow x_2 = -\frac{4}{7}$

$x_1 = \frac{8}{7}$

Mithilfe der Matrixmultiplikation lässt sich das System schreiben als $A\vec{x} = \vec{b}$

$\uparrow$ Koeffizientenmatrix

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Äquivalenzumformungen

Das LGS ist immernoch vollständig und „beinhaltet die gleiche Information", wenn man Vielfache von Gleichungen addiert.

d.h. LGS:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & \vdots \\ (m) & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} A\vec{x} = \vec{b}$$

Bsp: Ersetze Gleichung (1) durch $\alpha \cdot (1) + \beta\,(m) \rightarrow \underbrace{\text{neues LGS}}_{= \text{LGS}'}$

LGS':

$$\begin{array}{ll} (1) & (\alpha a_{11} + \beta a_{m1})x_1 + \dots + (\alpha a_{1n} + \beta a_{mn})x_n = \underline{\alpha b_1 + \beta b_m} \\ (2) & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ (m) & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

LGS': $A'\vec{x} = \vec{b}'$

Lösungsverfahren zu LGS

Wir schreiben $\underset{\text{geg.}}{A}\,\underset{\text{? ges.}}{\vec{x}} = \underset{\text{geg.}}{\vec{b}}$ in eine Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = (A \mid \vec{b})$$

(with the left block under-braced as A and the right column under-braced as $\vec{b}$)

Idee: A auf Dreiecksform bringen

<u>Schritt 1</u>: subtrahiere von allen Zeilen (i) die erste Zeile multipliziert mit $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, erste Zeile bleibt stehen.

$$\left(\begin{array}{c|c|c}
a_{11} & a_{12} \quad \cdots\cdots \quad a_{1n} & b_1 \\
0 & a_{22}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} \quad \cdots \quad a_{2n}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n} & b_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \\
0 & \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots & \vdots \\
\vdots & & \\
0 & * \qquad\qquad\qquad * & *
\end{array}\right)$$

Nullen erzeugen

Untermatrix

Weitere Schritte: Gleiche Operation auf Untermatrix und weitere Untermatrizen anwenden $\rightarrow$ Dreiecksform

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & \cdots & \cdots & x_n \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc|c}
* & * & * & \cdots & * & * \\
 & * & * & \cdots & * & * \\
 & & * & & \vdots & \vdots \\
 & 0 & & \ddots & & \\
 & & & & * & *
\end{array}\right)
\end{array}$$

Vorfaktor / Koeffizient von x_n

x_n

<u>Beispiel</u>:

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\
x_1 - x_2 - x_3 &= 3 \\
2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1
\end{aligned}$$

$\vec{b}$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A\,|\,\vec{b}) = \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ 2\mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2-1 & -2+1 & 6-1 \\ 0 & 2-1 & 1+1 & 1-1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} I \\ II+3III \\ III \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

3

Untermatrix

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} I \\ III \\ II \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{5} & \frac{5}{5} \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ I \\ II \\ III/5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \ldots$$

$x_3 = 1$

(II) $x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$

$x_3 = 1$

(I) $2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow 2x_1 - 2 - 1 = 1 \Rightarrow x_1 = 2$

$x_2 = -2$
$x_3 = 1$

Erweiterung: bringe Koeffizientenmatrix auf $\mathbb{1}$

$$A\vec{x} = \vec{b} \Longrightarrow A'\vec{x} = \vec{b}' \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow \mathbb{1}\vec{x} = \vec{b}''$$

Äquivalenzumformungen

mit unserer Schreibweise: $(A \mid \vec{b}) \Longrightarrow (\mathbb{1} \mid \vec{b}'')$

$\vec{x} = \vec{b}''$

dies führt direkt zur Lösung!

$$\ldots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Inverse Matrizen

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, quadratisch, so ist es möglich, dass A eine Inverse A^{-1} besitzt.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}$$

$A\vec{x} = \vec{y} \Rightarrow A^{-1}\vec{y} = \vec{x}$. A^{-1} ist Umkehrabbildung!

__Beispiel:__ Wann invertierbar und wann nicht?

im $\mathbb{R}^2$: (1) Rotation: $D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

invertierbar mit $D_\alpha^{-1} = D_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

erste Drehung: $D_\alpha \vec{x}$

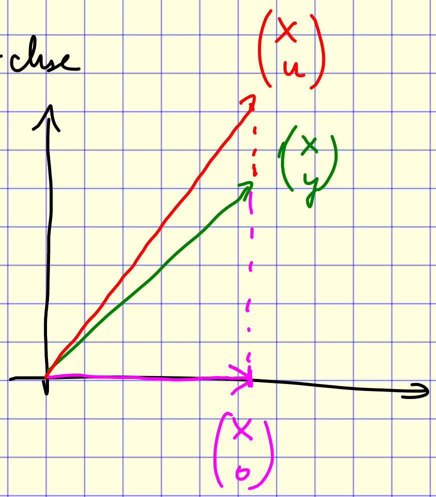
zweite Drehung (zurück): $\underbrace{D_\alpha^{-1} D_\alpha}_{\mathbb{1}} \vec{x} = \mathbb{1}\vec{x} = \vec{x}$

Übung: zeige $D_\alpha^{-1} D_\alpha = \mathbb{1}$

(2) Projektion auf die x-Achse

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_x \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$



nicht invertierbar!

__Bestimmung der inversen Matrix__

Löse das Gleichungssystem $\underset{\text{geg}}{A}\,\underset{\text{ges}}{A^{-1}} = \underset{\text{geg}}{\mathbb{1}}$

Schreibe $(A \mid \mathbb{1})$ und bringe dies durch Äquivalenzumformungen auf $(\mathbb{1} \mid A^{-1})$

z.B. $$\left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{matrix}}_{A} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \Rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \middle| \underbrace{\begin{matrix} -1/5 & 3/5 & 2/5 \\ 3/5 & -4/5 & -1/5 \\ -4/5 & 2/5 & 3/5 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$

prüfen $AA^{-1} = \mathbb{1}$

anschaulich: $A\vec{x} = \vec{y} \quad | A^{-1}$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{\mathbb{1}}\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$$

6. Differenzialrechnung

6.1. Folgen

Folgen sind Zahlen einer Menge, die in einer bestimmten Reihenfolge angeordnet sind.

$$(a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Es existieren

a) monotone Folgen **Bsp**: $a_n = 4+3(n-1)$
$= (4, 7, 10, 13, \ldots)$

- wachsend, falls $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$
- streng wachsend, falls $a_1 < a_2 < \ldots$
- fallend, falls $a_1 \geq a_2 \geq \ldots$
- streng fallend, falls $a_1 > a_2 > \ldots$

b) alternierende Folge $(a_n) = (-1)^{n+1} = (1, -1, 1, -1, \ldots)$

c) beschränkte Folge $(a_n) = \frac{1}{n} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots) > 0$

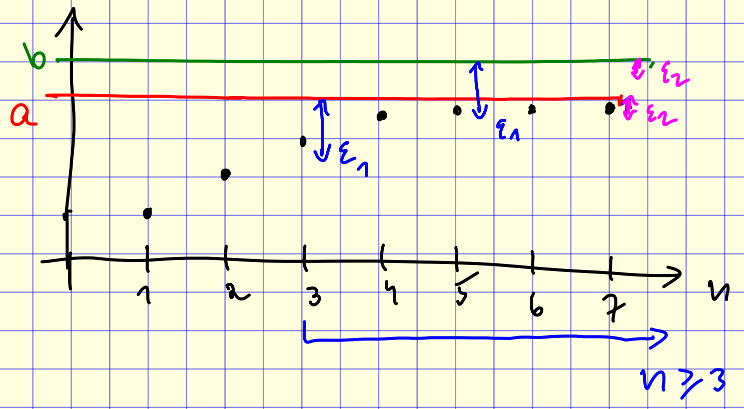
Grenzwert einer Folge

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \qquad a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$$

Satz: Die Folge a_n besitzt den Grenzwert a, wenn nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Zahl ε ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|a - a_n| < \varepsilon$$

Dann sagt man, die Folge konvergiert (gegen a).
Andernfalls divergiert die Folge.



<u>Bsp</u>: Fibonacci-Folge:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{für } n \geq 3 \quad \text{und} \quad f_1 = f_2 = 1$$

<u>divergiert</u> $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \infty$

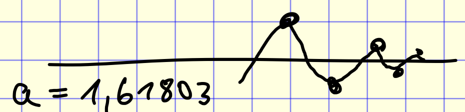
allerdings: Folge der Quotienten $\frac{f_{n+1}}{f_n} \equiv a_n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1{,}61803\,....$$

$$\frac{f_7}{f_6} = \frac{13}{8} = 1{,}6250 \qquad \frac{f_8}{f_7} = \frac{21}{13} = 1{,}6154$$

$$\frac{f_9}{f_8} = \frac{34}{21} = 1{,}619$$

alternierende Abweichung



<u>Goldener Schnitt</u> als Grenzwert

<u>Reihen</u>

Eine Reihe ist die Summe der Glieder einer Folge.

$$a_1 + a_2 + \,... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$ im Allgemeinen bis ∞ „unendliche Reihe"

Partialsummen

$s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, ...

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \rightarrow \text{Folge } (s_n)$$

Die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert.

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Andernfalls divergiert die Reihe

Bsp:

$$a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \longrightarrow \infty \quad \text{divergiert!}$$

$$= \underbrace{1 + \frac{1}{2}}_{1,5} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{1,8\overline{3}}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2} \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \rightarrow 2$$

6.2. Grenzwert von Funktionen

Grenzwert der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle a

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \; ; \quad f(x) \longrightarrow A \text{ für } x \longrightarrow a$$

Einseitige Grenzwerte

von oben / unten ?

linksseitig $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = A^{\pm}$

?

rechtsseitig $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = A^{\pm}$

Die Funktion f besitzt an der Stelle a den Grenzwert A, wenn der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert gleich A sind.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = A \quad \wedge \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = A$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = A$$

Bsp: $f(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$ hat keinen GW für $x \to 0$

Grenzwerte im Unendlichen

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = A$$

Rechenregeln für Grenzwerte

Sei $\lim_{x\to a} f(x) = F$ und $\lim_{x\to a} g(x) = G$

- $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = F + G = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a} [c \cdot f(x)] = c \cdot F$
- $\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = F \cdot G$
- $\lim_{x\to a} \left[f(x)/g(x) \right] = F/G$ falls $G \neq 0$

unbestimmte Ausdrücke

haben keine Bedeutung

$$\frac{0}{0}\,;\ \frac{\infty}{\infty}\,;\ 0\cdot\infty\,;\ \infty-\infty\,;\ 0^0\,;\ \infty^0$$

Bsp:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2}{x^3} \neq \frac{\lim_{x\to\infty} x^2-2}{\lim_{x\to\infty} x^3} \text{ ,,}=\text{''} \frac{\infty}{\infty}$$

wenn $x \to \infty$, $x > 0$

$$\to \text{kürzen} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\overset{\to 0}{1/x} - \overset{\to 0}{2/x^3}}{\underset{\to 1}{1}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}\right)}{\lim_{x\to\infty} 1} = 0$$

6.3 Stetigkeit von Funktionen

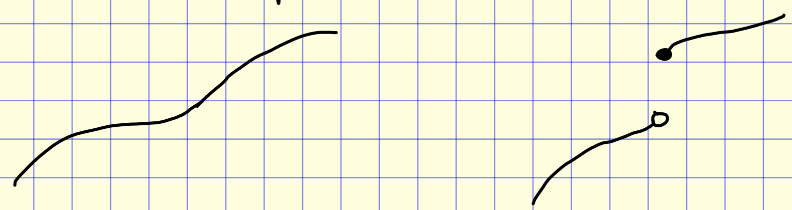
Eine Funktion $y = f(x)$ heißt stetig an der Stelle a, wenn $f(x)$ an dieser Stelle definiert ist, $f(a)$ also existiert, und

$$\underbrace{\lim_{x \to a}}_{\text{beidseitig}} f(x) = f(a)$$

Stetige Funktion

Eine an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs stetige Funktion $y = f(x)$ heißt stetig

↳ Durchziehen des Graphen



Sind $f(x)$, $g(x)$ zwei stetige Funktionen so sind sofern definiert die Verknüpfungen $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ auch stetige Funktionen.

Einschub: Partialbruchzerlegung

- gebrochen rationale Funktionen in „Brüche" zerlegen und dadurch vereinfachen

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

auf die Form:

$$f(x) = \frac{A_1}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(x-x_2)^{k_2}} + \ldots + \frac{A_q}{(x-x_q)^{k_q}}$$

x_i Nullstellen $i = 1, \ldots, q$ der Vielfachheit k_i

<u>Vorgehen</u>

1) für $n > m$: unecht gebrochen → <u>Polynomdivision</u>

2) Kürzen des Bruchs durch den Koeffizienten b_m

$\uparrow$ höchste Potenz

$$\rightarrow f(x) = \frac{c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0}{x^m + \ldots + d_1 x + d_0}$$

$$c_n = \frac{a_n}{b_m}, \quad c_i = \frac{a_i}{b_m}, \quad d_i = \frac{b_i}{b_m}$$

3) Bestimmung der Nullstellen des Nennerpolynoms
$(x_1, x_2, \ldots, x_r, \ r \leq m)$

4) Zerlegung des Nennerpolynoms
(Polynomdivision, quadratische Ergänzung, binom. Formeln)

$$x^m + d_{m-1} x^{m-1} + \ldots + d_0$$
$$= (x-x_1)^{k_1} \cdot (x-x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot \underline{(x^2 + p_1 x + q_1)}^{l_1} \cdot \ldots \cdot \underline{(x^2 + p_s x + q_s)}^{l_s}$$

in $\mathbb{R}$ nicht weiter zerlegbar

alternativ: in $\mathbb{C}$ vollständig: $(x-x_1)^{k_1} \cdot (x-x_2)^{k_2} \ldots (x-x_r)^{k_r}$

5) Zerlegung von $f(x)$ in eine Summe von Brüchen

$$f(x) = \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} \leftarrow x_1 \text{ mit VFH } k_1$$

$$+ \frac{A_{21}}{x-x_2} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} \leftarrow x_2 \text{ mit VFH } k_2$$

$$+ \frac{B_{11} + C_{11} x}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{B_{12} + C_{12} x}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \ldots + \frac{B_{1 l_1} + C_{1 l_1} x}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1}} \leftarrow \text{übrige Terme in } \mathbb{R}$$

6) Koeffizienten A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} bestimmen mittels Koeffizientenvergleich

Bsp: $$f(x) = \frac{6x^2-4}{2x^3+4x^2+4x+2}$$

1 $m > n$? ja !

Nullstellen: $\underbrace{(x+1)}_{x=-1}\underbrace{(x^2+x+1)}_{?\ \text{komplex}}$

$$\frac{3x^2-2}{x^3+2x^2+2x+1} \overset{!}{=} \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$3x^2-2 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

$$0x + 3x^2 - 2 = (A+B)x^2 + (A+B+C)x + A+C$$

$$A+B = 3, \quad A+B+C = 0, \quad A+C = -2$$

$$\Rightarrow A = 1, \quad B = 2, \quad C = -3$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{2x-3}{x^2+x+1}$$