VR06 30.09.24

Nachtrag Blatt 2:

Aufgabe 3:

Die Präfixe im SI[1]

Präfix	Name	Ursprung	Wert (Potenz, Zahl, Zahlwort der langen Skala)		
Q	Quetta	—[2]	10^{30}	Quintillion	1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
R	Ronna	lat. *novem*, gr. *ennéa* = neun[3]	10^{27}	Quadrilliarde	1 000 000 000 000 000 000 000 000 000
Y	Yotta	lat. *octo* = acht[4]	10^{24}	Quadrillion	1 000 000 000 000 000 000 000 000
Z	Zetta	lat. *septem* = sieben[4]	10^{21}	Trilliarde	1 000 000 000 000 000 000 000
E	Exa	gr. *héx* = sechs[5]	10^{18}	Trillion	1 000 000 000 000 000 000
P	Peta	gr. *pénte* = fünf[5]	10^{15}	Billiarde	1 000 000 000 000 000
T	Tera	gr. *téras* = Ungeheuer / gr. *tetrákis* = viermal	10^{12}	Billion	1 000 000 000 000
G	Giga	gr. *gígas* = Riese	10^{9}	Milliarde	1 000 000 000
M	Mega	gr. *mégas* = groß	10^{6}	Million	1 000 000
k	Kilo	gr. *chílioi* = tausend	10^{3}	Tausend	1 000
h	Hekto	gr. *hekatón* = hundert	10^{2}	Hundert	100
da	Deka	gr. *déka* = zehn	10^{1}	Zehn	10
—	—	—	10^{0}	Eins	**1**
d	Dezi	lat. *decimus* = Zehnter	10^{-1}	Zehntel	0,1
c	Zenti	lat. *centum* = hundert	10^{-2}	Hundertstel	0,01
m	Milli	lat. *mille* = tausend	10^{-3}	Tausendstel	0,001
µ	Mikro	gr. *mikrós* = klein	10^{-6}	Millionstel	0,000 001
n	Nano	gr. *nános* = Zwerg	10^{-9}	Milliardstel	0,000 000 001
p	Piko	ital. *piccolo* = klein	10^{-12}	Billionstel	0,000 000 000 001
f	Femto	dän. *femten* = fünfzehn[6]	10^{-15}	Billiardstel	0,000 000 000 000 001
a	Atto	dän. *atten* = achtzehn[6]	10^{-18}	Trillionstel	0,000 000 000 000 000 001
z	Zepto	lat. *septem* = sieben[4]	10^{-21}	Trilliardstel	0,000 000 000 000 000 000 001
y	Yokto	lat. *octo* = acht[4]	10^{-24}	Quadrillionstel	0,000 000 000 000 000 000 000 001
r	Ronto	lat. *novem*, gr. *ennéa* = neun[3]	10^{-27}	Quadrilliardstel	0,000 000 000 000 000 000 000 000 001
q	Quekto[7]	lat. *decem*, gr. *déka* = zehn[3]	10^{-30}	Quintillionstel	0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 001

d.) a.) $235\,km^2 \Rightarrow 235 \cdot \frac{k^2}{d^2}\, m^2$

$$= 235\, \frac{(10^3)^2}{(10^{-1})^2}\, dm^2$$

$$= 235 \cdot \frac{10^6}{10^{-2}}\, dm^2$$

$$= 235 \cdot 10^6 \cdot 10^2\, dm^2$$

$$= 235 \cdot 10^8\, dm^2$$

$$= 2{,}35 \cdot 10^{10}\, dm^2$$

b.) $0{,}287\, m^2 \Rightarrow 0{,}287 \cdot \frac{1}{d^2}\, m^2$

$$= 0{,}287 \cdot \frac{1}{(10^{-1})^2}\, dm^2$$

$$= 0{,}287 \cdot 10^2\, dm^2$$

$$= 28{,}7\, dm^2$$

c.) $342.748\, mm^2 = 342748 \cdot (10^{-3})^2\, m^2$

$$\Rightarrow 342748 \cdot \frac{10^{-6}}{10^{-2}}\, dm^2$$

$$= 342748 \cdot 10^{-4}\, dm^2$$

$$= 34{,}2748\, dm^2$$

Aufgabe 1:

a.) geg: Zylinder mit $D = 4h \rightarrow R = 2h$

$V = 90\,fl$

① $V = \underbrace{\pi R^2}_{A} \cdot h \overset{R}{\Rightarrow} V = \pi\, (2h)^2\, h$

$$\Leftrightarrow V = \pi\, 4h^3 \quad \Big| \cdot \frac{1}{4\pi} \quad \Big| \sqrt[3]{}$$

$$\Leftrightarrow h = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$$

② $1\,fl = 10^{-15}\, l = 10^{-18}\, m^3$ $(1\,dm^3 = 1\,l)$

$$\Rightarrow V = 90\,fl = 90 \cdot 10^{-18}\, m^3 = 9 \cdot 10^{-17}\, m^3$$

③ Einsetzen: $h = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 10^{-17}\, m^3}{4\pi}} \approx 1{,}93 \cdot 10^{-6}\, m$

$$= 1{,}93\, \mu m$$

$h \approx 2\,\mu m \qquad D = 4h \Rightarrow D = 4 \cdot 2\,\mu m = 8\,\mu m$

b.) $x \, \frac{km}{h} = x \, \frac{10^3}{3.600} \, \frac{m}{s} = x \, \frac{1.000}{3.600} \, \frac{m}{s} = x \, \frac{1}{3,6} \, \frac{m}{s}$

$\rightarrow y = \frac{x}{3,6} \qquad y$ in $\frac{m}{s}$

x in $\frac{km}{h}$

c.) geg: $\rho = 1 \frac{g}{cm^3}$; ges: ① ρ in $\frac{kg}{m^3}$; ② ρ in $\frac{pd}{ft^3}$

① $\rho = 1 \frac{g}{cm^3} = 1 \, \frac{10^{-3}}{(10^{-2})^3} \, \frac{kg}{m^3} = 1 \, \frac{10^{-3}}{10^{-6}} \, \frac{kg}{m^3} = 1 \cdot 10^3 \, \frac{kg}{m^3} = 1.000 \frac{kg}{m^3}$

② Ⓐ $1 ft = 12 \cdot 25,4\,mm = 30,48\,cm = 0,3048\,m$

$0,3048\,m \longmapsto 1 ft \qquad | \cdot \frac{1}{0,3048}$

$1\,m \longmapsto \frac{1}{0,3048} ft \qquad (\approx 3,3 ft)$

Ⓑ $453,6\,g \longmapsto 1 lb \qquad | \cdot \frac{1}{453,6}$

$1\,g \longmapsto \frac{1}{453,6} lb \qquad | \cdot 1000$

$1 kg = 1.000\,g \longmapsto \frac{1.000}{453,6} lb \qquad (\approx 2,2 lb)$

Ⓒ Einsetzen: $\rho = 1.000 \frac{kg}{m^3} = 1.000 \, \frac{\frac{1.000}{453,6} lb}{(1/0,3048 \, ft)^3}$

$= 1.000 \, \frac{1.000}{453,6} \cdot \underbrace{\left(\frac{0,3048}{1}\right)^3}_{} \frac{lb}{ft^3}$

$= 1.000 \cdot 0,062 \, \frac{lb}{ft^3}$

$\approx 62,43 \, \frac{lb}{ft^3}$

d.) geg: $1 PS \longmapsto 735,5 W$; $C = 3.400\,mAh$; $U = 4,4V$

$= 3,4\,Ah$

$P = U \cdot I \qquad ; E = P \cdot t$

① $E = P \cdot t = U \cdot \underbrace{I \cdot t}_{C} = 4,4V \cdot 3,4Ah$

$= 14,96\,Wh \qquad (A \cdot V = W)$

$h \to s$: $\ldots = 14{,}96\ W \cdot 3.600\,s$

$= 53.856\ Ws$

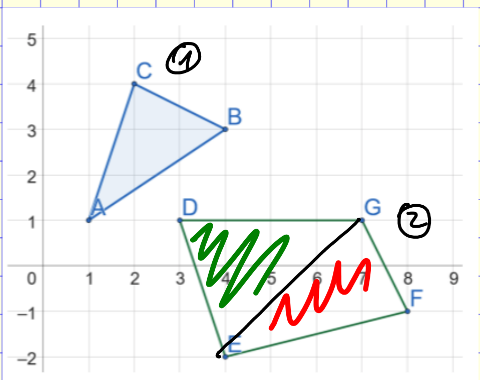
② $W \to PS$: $735{,}5\ W \longmapsto 1\,PS \quad \Big|\cdot \frac{1}{735{,}5}$

$1\,W \longleftrightarrow \frac{1}{735{,}5}\ PS$

$53.856\ Ws \cdot \frac{1}{735{,}5} \approx 73{,}22\ PS \cdot s$

$!\ \eta = 100\%\ !$

Aufgabe 2:



① $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$\vec{AC} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$; $\vec{BC} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

② $\vec{DG} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$; $\vec{GF} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

$\vec{FE} = \begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{ED} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

① $A = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}2\cdot 0 - 3\cdot 0\\ 0\cdot 1 - 0\cdot 3\\ 3\cdot 3 - 2\cdot 1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}0\\0\\9-2\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{7^2} = \frac{1}{2}\cdot 7$

$= \underline{\underline{3{,}5}}$

② Teile in 2 Dreiecke: ① ΔDEG ② ΔEGF

① $\vec{EG} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$; $\vec{ED} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

$A = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|(3\cdot 3) - (-1\cdot 3)\right| = \frac{1}{2}\left|9+3\right| = \frac{1}{2}\cdot 12 = \underline{\underline{6}}$

② $\vec{EG} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$; $\vec{EF} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

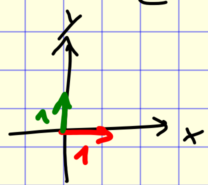
$A = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|(3\cdot 1 - 4\cdot 3)\right| = \frac{1}{2}\left|3-12\right| = \frac{1}{2}\cdot 9 = 4{,}5$

①+② $\Sigma_A = 4{,}5 + 6 = \underline{\underline{10{,}5}}$

Aufgabe 3:

i) geg: $\vec{r} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = -1\hat{e}_x + 2\hat{e}_y$ $\hat{e} \mathrel{\hat{=}}$ länge 1

ges: $r,\ \varphi$



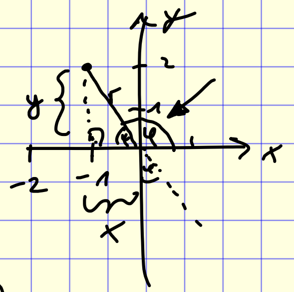
$\hat{e}_x = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\hat{e}_y = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Polarkoordinaten: $\vec{r} = r\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix}$

GAGA
HHAG

$$\cos(\varphi) = \frac{A}{H} = \frac{x}{r} \quad / \cos^{-1}()$$



$$x^2 + y^2 = r^2 \quad / \sqrt{\ }$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 117°$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} = r \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}}_{\hat{r}} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

ii) $A(-1/12/5)$; $B(1/2/5)$; $C(6,12,5)$

- $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 70 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 70 = \underline{\underline{35}}$$

iii) $A(-1/2/1)$; $B(1/0/3)$; $C(2/2/1)$

Notation:
Vektor: $\vec{r} = \underline{r}$
Matrix: $\underline{\underline{A}}$

Volumen Spat:

$$V = |(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}|$$

$$\Rightarrow V = \left| \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \\ -1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 1+3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$-1 \quad 1$
$2 \quad 0$

$$= |6 \cdot 2 + 4 \cdot 2 - 2 \cdot 1|$$
$$= 12 + 8 - 2$$
$$= \underline{\underline{18}}$$

iv.) a.)

$$\left.\begin{array}{l} g_1: y = 3x - 7 \Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 3x-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ g_2: y = 7x - 3 \Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 7x-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \end{array}\right\} x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1+21}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{1^2+7^2}} = \frac{22}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{50}} = \frac{22}{\sqrt{500}}$$

$$= \frac{11\sqrt{5}}{25}$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{11\sqrt{5}}{25}\right) \approx 10{,}3°$$

b.)

$$g_1: \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 3x-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g_2: \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 7x+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren gleich a.), daher gleiches Ergebnis ($\varphi = 10{,}3°$)

v.) $g_1: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$g_2: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\vec{r} = \vec{r} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4+a \\ -1-2a \\ 4+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b \\ b \\ 6-5b \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} I) \\ II) \\ III) \end{matrix}$$

① a berechnen II): $-1-2a = b$ in I: $4+a = 3(-1-2a)$

$\Leftrightarrow 4+a = -3-6a \quad | +6a$

$\Leftrightarrow 4+7a = -3 \quad | -4$

$\Leftrightarrow 7a = -7 \quad | \cdot \frac{1}{7}$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{a = -1}}$

② b berechnen: in II): $-1-2a = b$

$\Leftrightarrow -1-2(-1) = b$

$\Leftrightarrow -1+2 = b \Rightarrow \underline{\underline{b = 1}}$

- Schnittpunkt: $g_1: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Schnittwinkel:

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{3-2-15}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2} \cdot \sqrt{3^2+1^2+(-5)^2}}$$

$$= -\frac{14}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{35}} = -\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$\Rightarrow \varphi = 129{,}232°$ theoretisch

$\cos^{-1}\left(\pi - \left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\right) \approx 50°$ $\qquad 50° < 129$

$\Rightarrow \varphi = 50°$

vi.) $e_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$

$e_2: \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{x} = 5 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{x} - 5 = 0$

$\vec{x}$ aus e_1 in e_2 einsetzen:

$$\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-4\\1\\-7\end{pmatrix}\right]=5$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}+\underbrace{\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}}\alpha+\underbrace{\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\1\\-7\end{pmatrix}}\beta=5$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{3+2}+\underbrace{4\alpha+9\alpha+2\alpha}+\underbrace{16\beta+3\beta-14\beta}=5$$

$$\Leftrightarrow 5+15\alpha+5\beta=5 \quad |-5$$

$$\Leftrightarrow 15\alpha+5\beta=0 \quad |\cdot\frac{1}{15}$$

$$\Leftrightarrow \alpha+\frac{1}{3}\beta=0 \quad |-\frac{1}{3}\beta$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha=-\frac{1}{3}\beta}$$

einsetzen in e_1:

$$g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\left(-\frac{1}{3}\beta\right)\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-4\\1\\-7\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\beta\begin{pmatrix}-1/3\\1\\1/3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-4\\1\\-7\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\left[\beta\begin{pmatrix}-1/3-4\\1+1\\1/3-7\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}13/3\\0\\20/3\end{pmatrix}$$

Aufgabe 4:

a) z.z. $\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})}_{①}\perp\vec{a}$; $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

① $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$

$a_1 \quad b_1$

$a_2 \quad b_2$

Wenn Aussage wahr (Orthogonalität)

$$\Rightarrow (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=0$$

$$\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow a_1\cdot(a_2b_3-a_3b_2)+a_2(a_3b_1-a_1b_3)+a_3(a_1b_2-a_2b_1)$$

$$\Leftrightarrow a_1a_2b_3-a_1a_3b_2+a_2a_3b_1-a_2a_1b_3+a_3a_1b_2-a_3a_2b_1=0$$

quod erat demonstrandum

b.) analog zu a: $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$; $\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$

$$\underbrace{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})}_{①}=\underbrace{\vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})}_{②}$$

① $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\left(\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right)$

$$=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_2c_3-b_3c_2\\b_3c_1-b_1c_3\\b_1c_2-b_2c_1\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}a_1 & b_2c_3-b_3c_2\\a_2 & b_3c_1-b_1c_3\end{matrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_2b_1c_2-a_2b_2c_1-a_3b_3c_1+a_3b_1c_3\\a_3b_2c_3-a_3b_3c_2-a_1b_1c_2+a_1b_2c_1\\a_1b_3c_1-a_1b_1c_3+a_2b_2c_3+a_2b_3c_2\end{pmatrix}$$

Bei +/- aufpassen! „Minusklammer" bei Kreuzprodukt beachten

② $\vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right)-\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)$$

Skalarprodukt statt Kreuzprodukt!

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\cdot(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\cdot(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}b_1a_1c_1+b_1a_2c_2+b_1a_3c_3\\b_2a_1c_1+b_2a_2c_2+b_2a_3c_3\\b_3a_1c_1+b_3a_2c_2+b_3a_3c_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c_1a_1b_1+c_1a_2b_2+c_1a_3b_3\\c_2a_1b_1+c_2a_2b_2+c_2a_3b_3\\c_3a_1b_1+c_3a_2b_2+c_3a_3b_3\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}b_1a_1c_1+b_1a_2c_2+b_1a_3c_3-c_1a_1b_1-c_1a_2b_2-c_1a_3b_3\\b_2a_1c_1+b_2a_2c_2+b_2a_3c_3-c_2a_1b_1-c_2a_2b_2-c_2a_3b_3\\b_3a_1c_1+b_3a_2c_2+b_3a_3c_3-c_3a_1b_1-c_3a_2b_2-c_3a_3b_3\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}b_1a_2c_2+b_1a_3c_3-c_1a_2b_2-c_1a_3b_3\\b_2a_1c_1+b_2a_3c_3-c_2a_1b_1-c_2a_3b_3\\b_3a_1c_1+b_3a_2c_2-c_3a_1b_1-c_3a_2b_2\end{pmatrix}$$

① = ② $\Rightarrow$ stimmt $\square$ („Jacobi-Nachweis" analog)

Jacobi-Identität:

$$\underbrace{\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})}_{*}+\underbrace{\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})}_{**}+\underbrace{\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})}_{***}=0$$

$$\Rightarrow\underbrace{\vec{b}(\vec{a}\,\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\,\vec{b})}_{*}\underbrace{+\vec{c}(\vec{b}\,\vec{a})-\vec{a}(\vec{b}\,\vec{c})}_{**}\underbrace{+\vec{a}(\vec{b}\,\vec{c})-\vec{b}(\vec{c}\,\vec{a})}_{***}=0$$

c.) $\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}_{①}+\underbrace{(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})}_{②}=\underbrace{(\vec{a}\cdot\vec{a})\cdot(\vec{b}\cdot\vec{b})}_{③}$

① $\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

|2. Binom. Formel

$$\Leftrightarrow a_2^2b_3^2-2a_2b_3a_3b_2+a_3^2b_2^2+a_3^2b_1^2-2a_3b_1a_1b_3+a_1^2b_3^2+a_1^2b_2^2-2a_1b_2a_2b_1+a_2^2b_1^2$$

② $\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)$

$$\Leftrightarrow(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\cdot(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$$

$$\Leftrightarrow a_1^2b_1^2+a_1b_1a_2b_2+a_1b_1a_3b_3+a_2b_2a_1b_1+a_2^2b_2^2+a_2b_2a_3b_3+a_3b_3a_1b_1+a_3b_3a_2b_2+a_3^2b_3^2$$

$$\Leftrightarrow a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2+2a_1b_1a_2b_2+2a_1b_1a_3b_3+2a_2b_2a_3b_3$$

①+②: $a_2^2b_3^2-2a_2b_3a_3b_2+a_3^2b_2^2+a_3^2b_1^2-2a_3b_1a_1b_3+a_1^2b_3^2+a_1^2b_2^2-2a_1b_2a_2b_1+a_2^2b_1^2$

$+a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2+2a_1b_1a_2b_2+2a_1b_1a_3b_3+2a_2b_2a_3b_3$

$$\Leftrightarrow a_2^2b_3^2+a_3^2b_2^2+a_3^2b_1^2+a_1^2b_3^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2$$

③ $(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})$

$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)$

$\Leftrightarrow (a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$

$\Leftrightarrow a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2+a_3^2b_3^2$ /Nur Umstellen

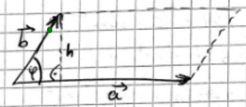
$\Leftrightarrow a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2+a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2$

Die „Mischterme" noch umstellen...

① + ② = ③

□

- $A \stackrel{!}{=} |\vec{a}\times\vec{b}|$
  - Winkelformel: $\cos(\varphi)=\frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ /Add. Theoren: $\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)=1$ ⊛
- Fläche des Parallelogramms mit den aufspannenden Vektoren definiert als: $\cancel{A = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\varphi)}$



$\cancel{① \text{ gezeigt } |\vec{a}\times\vec{b}|^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

$A=h|\vec{a}|$ $\quad \sin(\varphi)=\frac{h}{|\vec{b}|}$ $/\cdot|\vec{b}|$

$\Leftrightarrow h=|\vec{b}|\cdot\sin(\varphi)$

$\Rightarrow A=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\varphi)$ $\quad /()^2$

$A^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2(\varphi)$

$A^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2(\varphi))$

$A^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2(\varphi)$

$A^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\frac{(\vec{a}\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}$

$A^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\vec{b})^2$

⊛ $\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)=1$

$\Leftrightarrow \sin^2(\varphi)=1-\cos^2(\varphi)$

$\cos(\varphi)=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$\cos^2(\varphi)=\frac{(\vec{a}\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}$

gezeigt wurde: $\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})}+(\vec{a}\vec{b})(\vec{a}\vec{b})=(\vec{a}\vec{a})(\vec{b}\vec{b})$

$\Leftrightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}\vec{b})^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$ $/-(\vec{a}\vec{b})^2$

$\Leftrightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\vec{b})^2$

Ist A^2 $\Rightarrow$ stimmt □

G

H

$\sin(\varphi)=\frac{G}{H}$

① Startpunkt Algebra

② Startpunkt Geometrie

Zeigen: Geometrie = Algebra