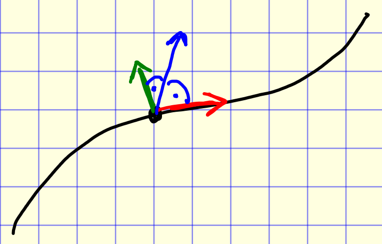
6.4. Ableitung einer Funktion

Wie ändert sich der Wert der Funktion bei kleinster Änderung des Argumentes?
infinitesimal

geometrisch: Steigung der Tangenten an den Graphen der Funktion

Beispiele aus höheren Dimensionen:

räumliche Änderung der Temperatur, Änderung des Ortes eines Teilchens über die Zeit



Trajektorie

vektorielle Geschwindigkeit

Krümmung / Bahnkrümmung

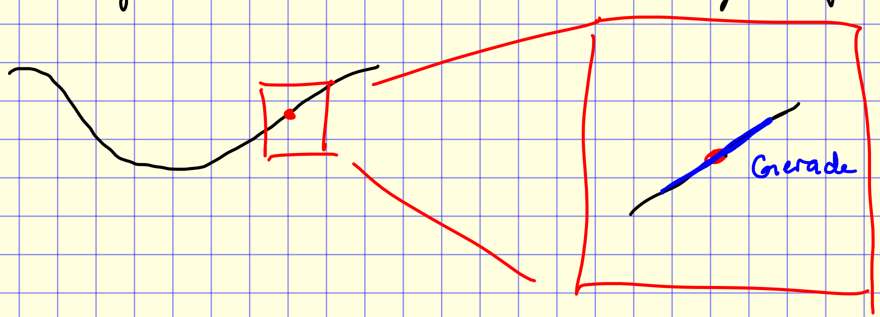
Torsion

Extremwertuntersuchungen

Wie muss man Parameter in einem System wählen, damit eine Größe maximal / minimal wird.

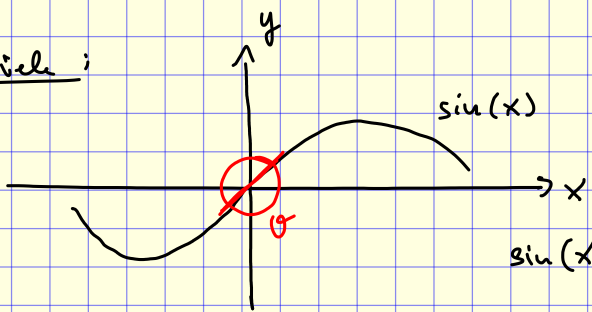
Linearisierung

lineare Annäherung einer Funktion in der Umgebung eines Punktes

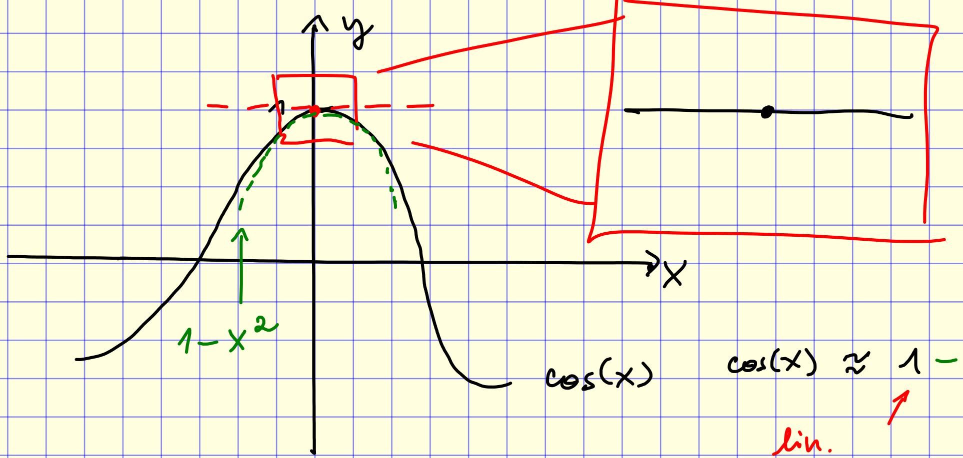


→ Vereinfachung von Problemen

Beispiel:



$\sin(x) \approx x$ für $|x| \ll 1$



$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

lin. Ord. — quadrat. Ord.

Ableitung

Existiert für eine Funktion $y = f(x)$ mit Definitionsbereich D der Grenzwert

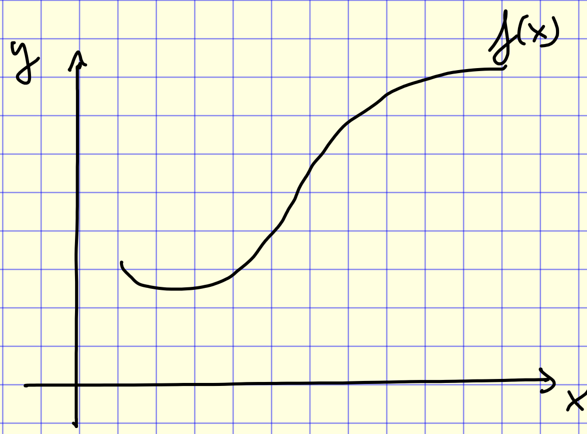
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \qquad x_0 \in D$$

dann nennt man $f'(x_0)$ die Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0.

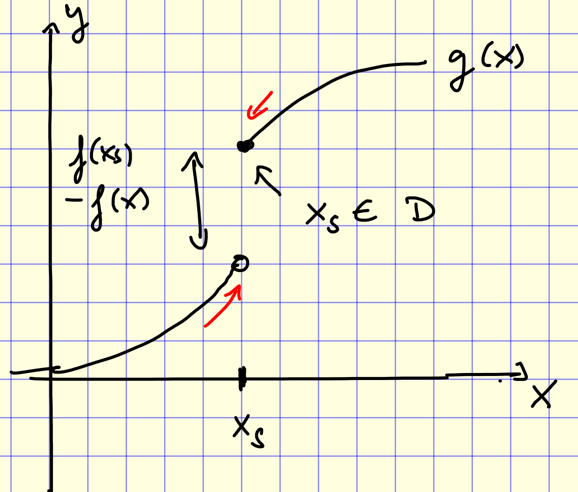
Dann ist $f(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar.

$f(x)$ ist differenzierbar, wenn $f(x)$ für alle $x \in D$ differenzierbar.

$f(x)$ ist stetig differenzierbar, falls $f'(x)$ eine stetige Funktion ist.



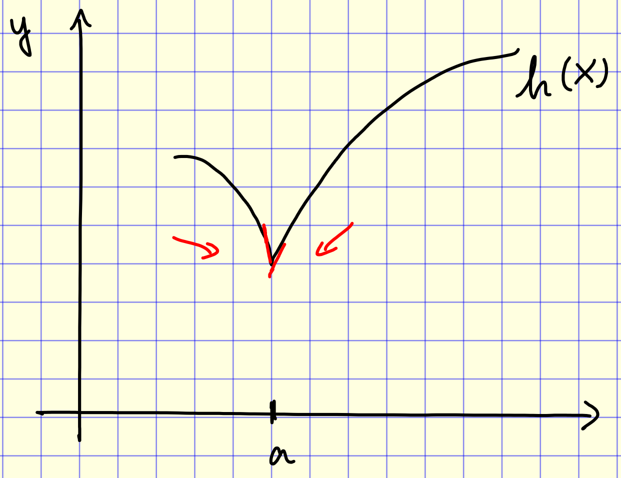
stetig und diff'bar

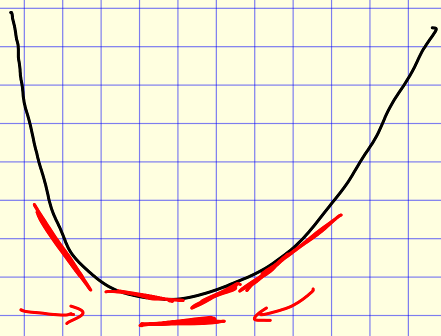


$g(x)$ unstetig, nicht diff'bar

(diff'bar auf $\mathbb{R} \setminus \{x_s\}$)

$$\lim_{x \to x_s^-} \frac{(f(x_s) - f(x)) \text{ endlich}}{(x_s - x) \to 0}$$





$h(x)$ ist stetig, nicht diff'bar

andere nützliche Formen des Differenzenquotienten

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon \equiv h$$

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

ergeben sich aus der Ersetzung $\varepsilon := x - x_0 \Rightarrow x_0 = x - \varepsilon$

6.5. Differenziationsregeln

1) konstante Funktion $y = f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}, \; c \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \quad y' = 0 \quad \left(\frac{c - c}{x - x_0} = 0 \right)$$

$c =$ const. / konst.

2) Faktorregel $y = c \cdot f(x) \Rightarrow y' = c \cdot f'(x)$

3) Summen / Differenzen $y = f(x) + g(x)$

$$y' = f'(x) + g'(x)$$

(Achtung: Grenzwerte nur verrechnen falls existent)

4) Produktregel

① $y = f(x) \cdot g(x)$

$$\Rightarrow \quad y' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

② $y = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$

$$\overset{PR①}{=} \quad f'(x)\cdot\big(g(x)\cdot h(x)\big) + f(x)\cdot\big(g(x)\cdot h(x)\big)'$$

$$\overset{PR①}{=} \quad f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)$$

→ Potenzfunktion (Polynome) $y = x^n \quad (n \in \mathbb{Z})$

$$y' = n\cdot x^{n-1}$$

für den Fall $n \in \mathbb{N}$

$$x^n = \underbrace{x\cdot x\cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-mal}}$$

$$\Rightarrow (x^n)' = \underbrace{\underbrace{(x)'}_{=1}\cdot\underbrace{(x\cdot x\cdot\ldots\cdot x)}_{(n-1)\text{-mal}} + \underbrace{x\cdot \overset{1}{\overset{\shortparallel}{(x)'}}\cdot \underbrace{(x\cdot\ldots\cdot x)}_{}}_{(n-1)\text{-mal}} + \ldots}_{n\text{-mal}}$$

$$= n\cdot x^{n-1}$$

$\Rightarrow$ Polynome $\quad y = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = c_0 + c_1 x^1 + \ldots + c_n x^n$

$$y' = \sum_{k=0}^{n} c_k\cdot k\cdot x^{k-1} = c_1 + 2c_2 x + \ldots + n\cdot c_n x^{n-1}$$

$k=0$

5) Quotientenregel

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x) \neq 0)$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{g(x)^2} \qquad \underline{\text{Beweis}}\text{: mit DQ}$$

<u>speziell</u>: $\quad f(x) = \text{const.} \quad f(x) = 1$

$$y = \frac{1}{g(x)} \;\rightarrow\; y' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

6) Kettenregel $\quad y = F(x) = f(h(x))$ und $z = h(x)$

$$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto z \qquad z \longmapsto f(z) = y$$

$F(x)$ ist diff'bar, wenn $y = f(z)$ und $z = h(x)$ diff'bar sind, und es gilt:

$$y' = F'(x) = \left.\frac{df}{dz}\right|_{h(x)} \cdot \left.\frac{dh}{dx}\right|_{x} = \underbrace{f'(h(x))}_{\text{äußere Ableitung an der Stelle der inneren Fkt.}} \cdot \underbrace{h'(x)}_{\text{innere Abl. an } x}$$

$h(x)$ → Argument

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(z+\varepsilon) - f(z)}{\varepsilon}$$

7) Ableiten der Umkehrfunktion

Sei $f(x)$ eine diff'bare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ und Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ $\left[f^{-1}(f(x)) = x \right]$, so ist auch $f^{-1}(x)$ diff'bar

z.B. arcsin zu sin

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Bsp: Ableitungsregeln

- $y = 3 \Rightarrow y' = 0$
- $y = 3x^2 \rightarrow y' = 6x$
- $y = x^2 + 3x \rightarrow y' = 2x + 3$
- $y = x^7 \rightarrow y' = 7x^6$
- $y = 3x^2 \cdot \sin x \rightarrow y' = 6x \cdot \sin x + 3x^2 \cdot \cos x$
- $y = \dfrac{5x-1}{2x+3} \longrightarrow y' = \dfrac{5 - 1 - 5x}{4x^2 + 12x + 9}$?

$$y' = \frac{\underline{5 \cdot (2x}+3) - \underline{2 \cdot (5x}-1)}{(2x+3)^2}$$

$$= \frac{10x + 15 - 10x + 2}{(2x+3)^2} = \frac{17}{(2x+3)^2}$$

- $\sqrt{5x^2 - 7x + 8}$ $\quad z = h(x) = 5x^2 - 7x + 8$

$$f(z) = \sqrt{z}$$

$$(f(h(x)))' = \left.\frac{d\sqrt{z}}{dz}\right|_{h(x)} \cdot \left.\frac{dh}{dx}\right|_{x}$$

Potenzregel $\quad \frac{d\sqrt{z}}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$

$$\frac{dh}{dx} = 10x - 7$$

$$\rightarrow \quad \frac{d\sqrt{5x^2 - 7x + 8}}{dx} = \frac{10x - 7}{2\sqrt{5x^2 - 7x + 8}}$$

Schreibweise

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\overbrace{f(x + x_0) - f(x)}^{\Delta f}}{\underbrace{x - x_0}_{\Delta x}} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$= \frac{df}{dx}(x_0)$$

Da die Ableitung eine lineare Abbildung ist, die man „wie eine Matrix multipliziert", schreibt man auch

$$\frac{d}{dx} f(x), \quad \text{z.B.} \quad \underbrace{\frac{d}{dx}}_{D} \sqrt{5x^2 - 7x + 8}$$

D Ableitungsoperator

Physik: Ableitung nach der Zeit $\frac{d}{dt}$ wird mit einem Punkt abgekürzt

$x = x(t)$ Ortskoordinate $\Rightarrow \dot{x} = \frac{d}{dt} x = \frac{dx}{dt}$

$= v(t)$

$v(t)$ Geschwindigkeit (in x-Rtg)

in $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}; \quad \frac{d}{dt}\vec{r} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \vec{v}$$

Tangente an die Bahn

<u>höhere Ableitungen</u>

- $y = f(x)$ diff'bar auf Intervall D so kann dort $f'(x)$ gebildet werden
- $y = f'(x)$ diff'bar auf D, so nennt man

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x)$$

die zweite Ableitung von $f(x)$

- $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$ ist die n-te Ableitung

lineare Abb.:

$$D\,[\alpha f(x) + \beta g(x)]$$
$$= [\alpha f(x) + \beta g(x)]'$$
$$= (\alpha f(x))' + (\beta g(x))'$$
$$= \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$
$$= \alpha Df + \beta Dg$$

<u>Bsp</u>: $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 5x - 2$

$$f'(x) = 16x^3 - 36x^2 + 5$$
$$f''(x) = 48x^2 - 72x$$
$$f'''(x) = 96x - 72$$
$$f^{(4)}(x) = 96$$
$$f^{(5)}(x) = 0 = f^{(6)}(x) = \dots = f^{(n)}(x) \quad \text{mit } n \geq 5$$

6.6. <u>Elementare Ableitungsfunktionen</u>

- algebraische Funktionen

↳ rationale

$$y = c \qquad y' = 0$$
$$y = x^n \qquad y' = nx^{n-1}$$
$$y = \frac{1}{x} \qquad y' = -\frac{1}{x^2}$$

↳ irrationale

$$y = \sqrt{x} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = \sqrt[n]{x} \rightarrow y' = \frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{x^{n-1}}}$$

↳ transzendente Funktionen

- trigonometrische Funktionen

$$y = \sin x \quad , \quad y' = \cos x$$

$$y = \cos x \quad , \quad y' = -\sin x$$

$$y = \tan x \quad , \quad y' \overset{QR}{=} \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \cot x \quad , \quad y' \overset{QR}{=} -\frac{1}{\sin^2 x}$$

- Exponentialfunktion

① $y = a^x \rightarrow y' = a^x \cdot \ln(a)$, $(a \in \mathbb{R}, a > 0, \text{const.})$

② $y = e^x \rightarrow y' = e^x = y$

<u>Beweis</u> ①: $y = a^x$

$$= e^{\ln(a^x)} = e^{\overbrace{x \cdot \ln(a)}^{h(x)}}$$

$$\Rightarrow y' = e^{x \cdot \ln(a)} \cdot \underbrace{h'(x)}_{\ln(a)} = \ln(a) \cdot \underbrace{e^{x \cdot \ln(a)}}_{a^x}$$

$$= a^x \cdot \ln(a)$$

- Logarithmusfunktion

$$y = \ln(x) \rightarrow y' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$$y = \log_a(x) \rightarrow y' = \frac{1}{x} \cdot \log_a(e) = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln(a)}$$

$$(a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, x > 0)$$

<u>Beweis</u>: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ $\quad - \frac{f''(f^{-1}(x))}{f'^2(f^{-1}(x))} \cdot (f^{-1})'(x)$

$f(x) = e^x$ gesucht: $(f^{-1})'(x) = (\ln(x))'$

$f'(x) = e^x$

$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$

$$-\frac{f''(f^{-1}(x))}{f'^2(f^{-1}(x))} \cdot \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = -\frac{f''(f^{-1})}{f'^3(f^{-1})}$$

6.7. Eigenschaften von Funktionen

- Extremwerte von Funktionen

$y = f(x)$ besitzt bei $x = a$ ein lokales Maximum, wenn in der Umgebung von a alle $f(x)$ kleiner als $f(a)$ sind (Minimum → größer)

notwendige Bedingung

$$f'(a) = 0$$

lokales Extremum von $f(x)$ an der Stelle $x = a$ $\Rightarrow$ $f'(a) = 0$

hinreichende Bedingung

ist die zweite Ableitung von $f(x)$ $f''(x)$ an der Stelle $x = a$ verschieden von 0, d.h. $f''(a) \neq 0$, und $f'(a) = 0$, so befindet sich an der Stelle a ein lokales Extremum.

$$\underbrace{f''(a) \neq 0 \wedge f'(a) = 0}_{\text{hinreichend}} \Rightarrow \underbrace{\text{lokales Extremum}}_{\text{notwendig}}$$

↳ lokales Minimum, wenn $f''(a) > 0$

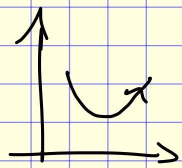
↳ lokales Maximum, wenn $f''(a) < 0$

Hinreichende Bedingung für lokales Extremum für den Fall $f''(a) = 0$: Dann hat $f(x)$ bei a ein lokales Extremum, falls ein **gerades** n existiert, so dass

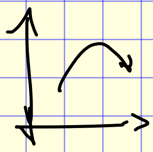
$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{n-1}(a) = 0 \quad \underline{\text{und}} \quad f^{n}(a) \neq 0$$

- Krümmungsverhalten:

$f''(x) > 0 \rightarrow$ linksgekrümmt



$f''(x) < 0 \rightarrow$ rechtsgekrümmt



$f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkt