1 Differenzialrechnung

Differenzieren Sie nach x.

a) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{bx+c}\right)^2$

b) $\frac{(x+1)\sin(x+1)}{(x-1)^2}$

c) $\ln\sqrt{x^2+\sin^2(x)}$

d) x^x ; Tip: z.B. $7 = \mathrm{e}^{\ln 7}$

2 Integralrechnung

(i) Integrieren Sie nach x. Finden Sie alle Stammfunktionen.

a) x^2

b) x^n, $n \neq -1$

c) $\frac{1}{x}$

d) $\frac{1}{x+23}$

e) $\frac{-5}{x^6}$

f) e^{-5x}

g) $\sin(x)\cos(x)$

h) $x\cos(x)+\sin(x)$

i) $\frac{x}{1+x^2}$

j) $6\sin(4-3x)+3e^{-2x}+5$

k) $\frac{x^3+2x^2-5x-6}{x^2-x-2}$

l) $\frac{x+29}{x^2+3x-28}$

Hinweis: Vereinfachen Sie in k) und l) durch Polynomdivision oder Partialbruchzerlegung.

(ii) Berechnen Sie die Nullstellen von f und skizzieren Sie das Schaubild. Berechnen Sie anschließend die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossene Fläche.

a) $f(x) = 4x - x^2$

b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

(iii) Bestimmen Sie die Stammfunktionen durch Substitution.

a) $\frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)+3}}$

b) $\frac{(\ln(x^3))^2}{x}$

c) $\frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}-e^x-2}$, $x > \ln(2)$

(iv) Bestimmen Sie die Stammfunktionen durch partielle Integration.

a) $x\sin(x)$

b) $\sin^2(x)$

c) $\ln(x)$

3 Integralrechnung - Anwendung 1

Zeigen Sie mit Integralrechnung, dass die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks gerade die Hälfte des Produktes aus Grundseite und Höhe ist. Verallgemeinern Sie dies dann für beliebige Dreiecke.

4 Integralrechnung - Anwendung 2

Durch die Einnahme eines Medikaments zur Regulierung des Blutdrucks gelangen Wirkstoffe ins Blut. Die Wirkstoffmenge im Blut kann näherungsweise durch eine Funktion $m(t)$ beschrieben werden. Die Änderung von $m(t)$ mit der Zeit ist die Summe aus einer konstanten Abbaurate und einer Exponentialfunktion.

$$m'(t) = \frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t} = a\mathrm{e}^{-b\cdot t} - c \quad ; \quad a = 1.2\,\mathrm{mg/min};\, b = 0.04\,\mathrm{min}^{-1};\, c = 0.1\,\mathrm{mg/min}$$

$$t > 0\,; \quad t \text{ in min.}$$

Zu Beginn bei $t = 0$ sind 10 mg des Wirkstoffs im Blut.

a) Erstellen Sie die Gleichung für $m(t)$ und stellen Sie diese in GeoGebra dar.
   Beachte $m(t = 0) = 10\,\mathrm{mg}$
b) Wann ist der Wirkstoff vollständig abgebaut?
c) Wie ändert sich die Abbauzeit, wenn anfänglich die die doppelte Menge Wirkstoff im Blut war?

Hinweis zu b) und c): Dies kann nur numerisch ermittelt werden, nutzen Sie GeoGebra.

Viel Spaß beim Lösen. ☺