7. Integralrechnung I

7.1. Ober-/Untersummen

Funktion auf Intervall $[a,b]$, ges. Flächeninhalt zur x-Achse?

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot \Delta x \quad ; \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Wir unterscheiden Ober- und Untersumme

Bsp: $f(x) = 4 - x^2$; Fläche zwischen NS $x = \pm 2$

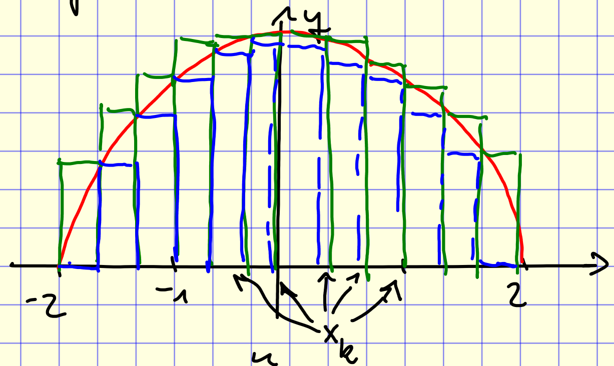
für Obersumme wähle $x_k = -2 + (k+1)\cdot\Delta x$; $k = 1, 2, \dots \frac{n}{2} - 1$

$x_k = -2 + (k-1)\cdot\Delta x$; $k = \frac{n}{2} + 1, \dots, n$

n - gerade Zahl

für Untersumme $x_k = -2 + (k-1)\cdot\Delta x$; $k = 1, \dots \frac{n}{2} - 1$

$x_k = -2 + (k+1)\cdot\Delta x$; $k = \frac{n}{2} + 1, \dots n$



Obersumme $A_o > A_f$

Untersumme $A_u < A_f$

$$A_o = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x \; ; \; x_k \in X_o \; ; \quad A_u = \sum f(x_k)\cdot\Delta x \; ; \; x_k \in X_u$$

$$= \sum f(x_k)\cdot\frac{b-a}{n}$$

$\Rightarrow$ Folge von Partialsummen, die Grenzwerte $\Rightarrow A_f$

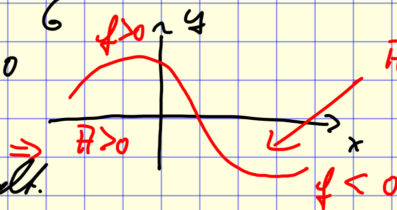
$$\lim_{n\to\infty} A_o = \lim_{n\to\infty} A_u = A_f$$

Wir können den Grenzwert ausrechnen, nur Intervall $[-2, 0]$

$$A_o = \sum_{k=1}^{n} \left(4 - (-2 + (k+1)\cdot\Delta x\right)^2\cdot\Delta x \quad ; \; \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$= -4\Delta x^2 \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k+1}_{\sum k = \frac{n(n+1)}{2}} - \Delta x^3 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2}_{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(2n+1)(n+1)} = A_o$$

Anmerkung: wenn $f(x) < 0 \Rightarrow A < 0$



$\underline{\Delta x > 0}$

$\Rightarrow$ das ist der orientierte Flächeninhalt.

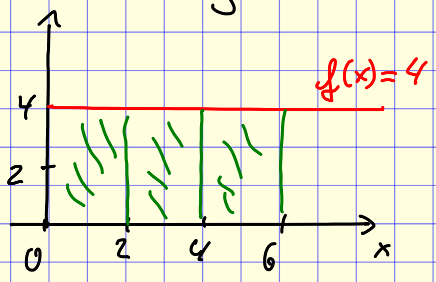
7.2. Integral & Integrierbarkeit

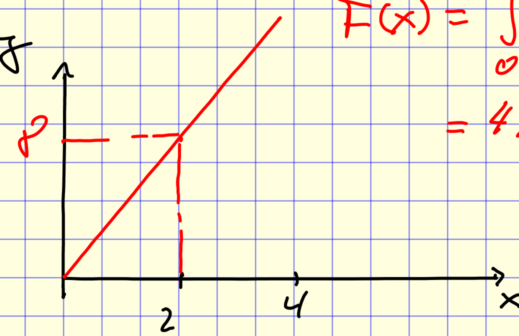
Def: Eine Fkt $f(x)$ ist auf dem Intervall $[a,b]$ integrierbar, wenn Grenzwerte von Ober- und Untersumme gleich sind.
Der Grenzwert ist der orientierte Flächeninhalt.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} A_o = \lim_{n\to\infty} A_u$$

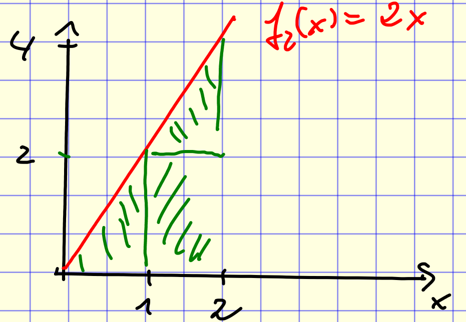
$f(x)$ = Integrand ; a, b sind obere und untere Grenze

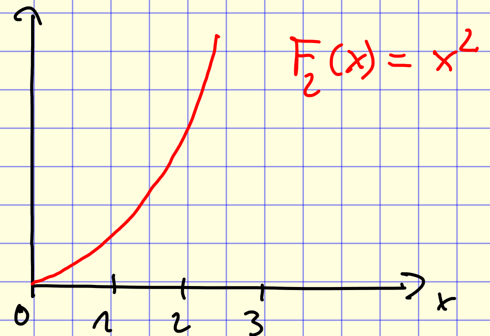
Zusammenhang mit Ableitung





$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$$
$$= 4x$$





Integrand $f(x)$ beschreibt Änderungsrate des Integrals

Integrieren $\hat{=}$ Differenzieren rückwärts

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = g(x)$$

$$df = g(x)\cdot dx \qquad \Big| \int \text{ als Operator}$$

$$\int df = \int g(x)\,dx$$

$$\int 1\,df = f \quad ; \quad f(x) = \int g(x)\,dx$$

$$\int 1\,dg = g$$
$$\int 1\,dx = x$$
$$\int 1\,df = f$$

Bemerkung $\int bla\; d\,bla = \frac{1}{2}\, bla^2 = \frac{1}{2}\, bla\; bla$

Definition Stammfunktion

Eine Funktion F mit der Eigenschaft $F' = f$ heißt Stammfunktion von f. Ist F eine Stammfunktion, so ist auch mit jedem $c \in \mathbb{R}$ $G(x) = F(x) + c$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

Bew. $(F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$

7.3. Hauptsatz Differential- & Integralrechnung

Ist F eine Stammfunktion von f so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

7.3. Bestimmung der Stammfunktion, Rechenregeln

bisher bestimmtes Integral $\hat{=}$ Fläche; bestimmtes Integral $\hat{=}$ Stammfkt.

Definieren: unbestimmtes Integral

Ist F eine Stammfunktion einer Funktion f so wird die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f als unbestimmtes Integral von f bezeichnet.

man schreibt $\quad \int f(x)\,dx = F(x) + C \quad ; \; C \in \mathbb{R}$

Die Stammfunktion ist immer bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Rechenregeln:

a) Faktorregel $\quad \int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx \quad , \; a \in \mathbb{R}$

b) Summenregel $\quad \int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

c) Lineare Verkettung

Ist F eine Stammfkt. von f, so ist für $a \neq 0$

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \;, \; C \in \mathbb{R}$$

Spezialfall der allg. Substitution

d) Vertauschen der Integrationsgrenzen

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{auch aus} \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_b^a f(x) = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)\,dx$$

e) Nullintegral

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

f) Addition von Integrationsintervallen f auf $[a, c]$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$; Bew. Hauptsatz

Wichtige Stammfunktion   Bew. durch Ableiten

- Potenzfunktion $\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$; $r \neq -1$
- Wurzelfunktion $r = \frac{1}{2}$
  $$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$
- Hyperbelfunktion
  $$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln(|x|) + C$$
- Exponentialfunktion $\int e^x dx = e^x + C$
  ↳ allg. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$; Bsp. $7 = e^{\ln 7}$
- Logarithmusfunktion
  $$\int \ln(x) = x \ln x - x + C$$; später $\int 1 \cdot \ln x\,dx = \ldots$
- Trigonometrische Fkt.
  $$\int \sin(x)\,dx = -\cos x + C$$
  ⋮

❗ $\int f(x) \cdot g(x)\,dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$

Uneigentliche Integrale

geg.: Funktion mit Definitionslücke oder nicht endliche Grenze im Integral

das uneigentliche Integral ist der Grenzwert des bestimmten Integrals

sei $f(x)$ eine integrierbare Fkt. mit Lücke an $x = x_0$, $a < x_0 < b$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to x_0^-} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{c \to x_0^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

analog. in $(-\infty, a] \cup [b, \infty)$

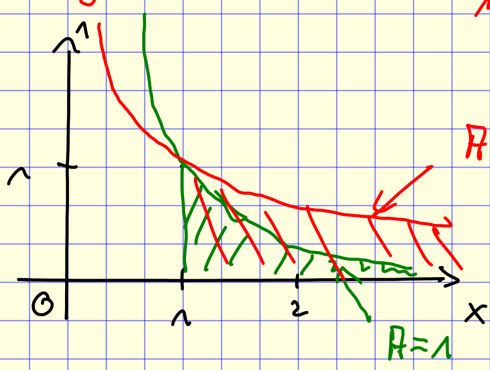
$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{a} f(x)\,dx$$

$$\int_{b}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_{b}^{c} f(x)\,dx$$

Bsp

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^\infty x^{-2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = \lim_{c\to\infty}\Big(\underbrace{-\frac{1}{c}}_{F(b)}+\underbrace{\frac{1}{1}}_{F(a)}\Big) = 1$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)\Big|_1^\infty = \lim_{c\to\infty}\Big(\underbrace{\ln(c)}_{\infty}-\underbrace{\ln(1)}_{0}\Big) = +\infty$$



Weitere Regeln

① partielle Integration

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\cdot G(x) - \int f'(x)\cdot G(x)\,dx$$

wobei $G(x) = \int g(x)\,dx$

woher?

$$[u\cdot v]' = u'\cdot v + u\cdot v' \quad \Big|\int$$

$$\int [u\cdot v]' = \int u'v + \int uv'$$

$$u\cdot v = \int u'\cdot v + \int u\cdot v'$$

② Substitution

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(g(x))\,\frac{dg}{\cancel{dx}}\cdot\cancel{dx} = \int f(g(x))\,dg(x) = \int f(g)\,dg$$