Vorrechnen Blatt 10

A1 a) $$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{a}-\sqrt{bx+c}\right)^2 = 2\left(\sqrt{a}-\sqrt{bx+c}\right)\cdot\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{bx+c}}\cdot b$$

$$= -\frac{\sqrt{a}-\sqrt{bx+c}}{\sqrt{bx+c}}\cdot b = \frac{\sqrt{a}\,b}{\sqrt{bx+c}} + b$$

b) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{(x+1)\sin(x+1)}{(x-1)^2}\right) = \frac{\frac{d}{dx}\left[(x+1)\sin(x+1)\right]\cdot(x-1)^2 - \frac{d}{dx}(x-1)^2\cdot\overbrace{(x+1)\sin(x+1)}}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{\left[\sin(x+1)+(x+1)\cos(x+1)\right](x-1)^2 - 2(x+1)(x-1)\sin(x+1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{\sin(x+1)+(x+1)\cos(x+1)}{(x-1)^2} - \frac{2(x+1)\sin(x+1)}{(x-1)^3}$$

c) $$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\sqrt{x^2+\sin^2(x)}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2(x)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+\sin^2(x)}}\cdot(2x+2\sin x\cos x)$$

$$= \frac{1}{|x^2+\sin^2(x)|}\cdot x+\sin x\cos x = \frac{x+\sin x\cos x}{|x^2+\sin^2(x)|}$$

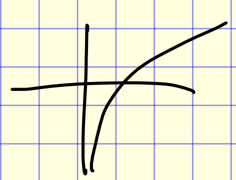
d) $$\frac{d}{dx}\left(x^x\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\ln(x^x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{x\ln(x)}\right)$$

$$= e^{x\ln(x)}\cdot\left(\ln(x)+\frac{1}{x}\cdot x\right) = x^x\left(\ln(x)+1\right)$$

2 a) $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c$

b) $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ $\qquad n \neq -1$

c) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + c$



d) $\int \frac{1}{x+23}\,dx = \ln(|x+23|) + C$

e) $\int \frac{-5}{x^6}\,dx = \int -5 \cdot x^{-6}\,dx = x^{-5} + C$

f) $\int e^{-5x}\,dx = -\frac{1}{5}\,e^{-5x} + C$

g) $\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C$

P.I.: $\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$

$\cancel{} = \sin(x)\sin(x) - \int \cos(x)\cdot\sin(x)\,dx$

$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \sin^2(x) - \int \cos(x)\cdot\sin(x)\,dx \quad \Big|+\int \cos(x)\sin(x)$

$2\cdot\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \sin^2(x)$

$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C$

h) $\int x\cos(x) + \sin(x)\,dx = \int \underset{f(x)}{x}\,\underset{g'(x)}{\cos(x)}\,dx + \underbrace{\int \sin(x)\,dx}_{-\cos(x)+C}$

$\int x\cos(x)\,dx = x\cdot\sin(x) - \underbrace{\int 1\cdot\sin(x)\,dx}_{-\cos(x)+C}$

$\int x\cos(x) + \sin(x)\,dx = x\cdot\sin(x) + \cos(x) - \cos(x) + C$

$= x\cdot\sin(x) + C$

i) $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

$u = 1+x^2$

$du = 2x\,dx$

$\Leftrightarrow dx = \frac{1}{2x}\,du$

$= \int \frac{x}{u}\,dx$

$= \int \frac{x}{2\cancel{x}} \cdot \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$

$= \frac{1}{2} \cdot \ln(|u|) = \frac{1}{2} \cdot \ln(|1+x^2|)$

j) $\int \left(6\sin(4-3x) + 3e^{-2x} + 5\right)dx$

$= \int 6\sin(4-3x)\,\overset{dx}{\cancel{}} + \int 3\cdot e^{-2x}\,\overset{dx}{\cancel{}} + \int 5\,dx$

$= 6\cdot\cos(4-3x)\cdot\frac{1}{3} + \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot e^{-2x} + 5x$

$= 2\cos(4-3x) - \frac{3}{2}e^{-2x} + 5x + C$

k) $\int \frac{x^3+2x^2-5x-6}{x^2-x-2}\,dx = \int x+3\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$

NR:

$(x^3+2x^2-5x-6) : (x^2-x-2) = x+3$

g) $\int \frac{x+29}{x^2+3x-28}\,dx$

NR: $x^2+3x-28=0$

$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+28}$

$x_1 = 4 \quad \vee \quad x_2 = -7$

$\frac{x+29}{x^2+3x-28} = \frac{x+29}{(x-4)\cdot(x+7)}$

$\Rightarrow (x+29) = (x-4)A + (x+7)B$

$x=4: \; 33 = 11B \Rightarrow B=3$

$x=-7: \; 22 = -11A \Rightarrow A=-2$

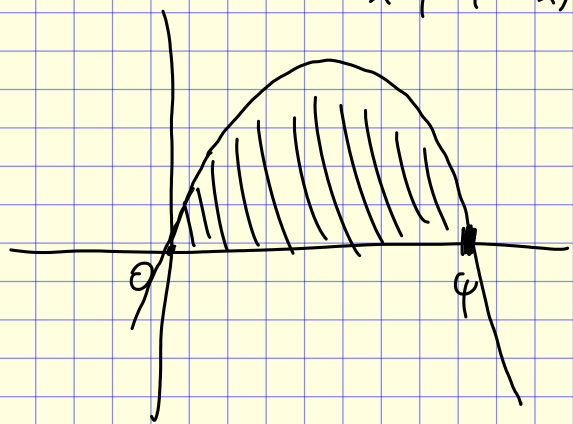
$$\int \frac{x+29}{x^2+3x-28}\,dx = \int \left(\frac{-2}{x+7} + \frac{3}{x-4}\right) dx$$

$$= -2 \cdot \ln(|x+7|) + 3 \cdot \ln(|x-4|)$$

$$= \ln\left(\frac{(|x-4|)^3}{(x+7)^2}\right) + C$$

ii) a) $f(x) = 4x - x^2$ $\qquad x=0 \quad \vee \quad x=4$

$= x(4-x)$



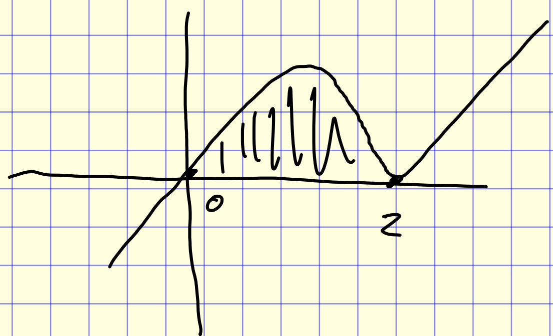
$$\int_0^4 4x - x^2\,dx$$

$$= \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = 2\cdot 16 - \frac{1}{3}\cdot 4^3$$

$$= \underline{\underline{\frac{32}{3}}}$$

b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

NS: $x=0$, $x=2$



$$\int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

iv| a) $\int \underset{f(x)}{x} \underset{g'(x)}{\sin(x)} \, dx = -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x) \, dx$

$= -x \cos(x) + \sin(x) + C$

b) $\int \sin^2 x \, dx = \int \underset{f(x)}{\sin(x)} \cdot \underset{g(x)}{\sin(x)} \, dx$

$= -\sin(x) \cdot \cos(x) + \int \underbrace{\cos x \; \cos x}_{\circ} \, dx$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2(x)$

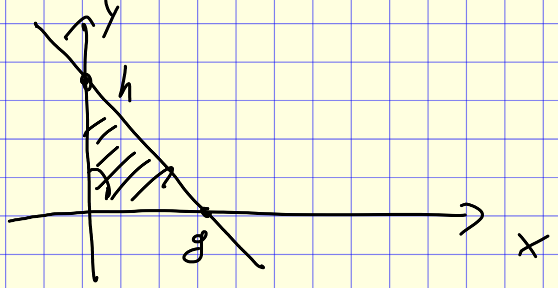
$\int \sin^2(x) = -\sin(x) \cdot \cos(x) + x - \int \sin^2(x) \, dx \quad \Big| + \int \sin^2(x)$

$\int \sin^2(x) \, dx = \frac{-\sin(x) \cdot \cos(x)}{2} + \frac{x}{2}$

c) $\int \ln(x) \, dx = \int \underset{f(x)}{\ln(x)} \cdot \underset{g'(x)}{1} \, dx$

$= \ln(x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = \ln(x) \cdot x - x + C$

A3|

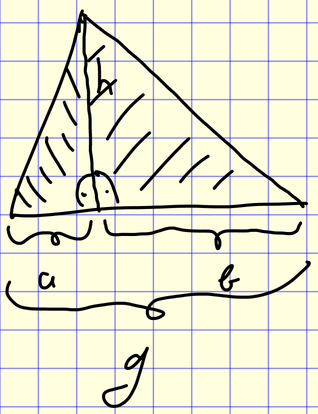


$f(x) = -\frac{h}{g} \cdot x + h$

$\int_0^g -\frac{h}{g} \cdot x + h \, dx$

$= \left[-\frac{h}{2g} x^2 + hx \right]_0^g$

$= -\frac{h}{2g} g^2 + hg = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$ ☒



$A_2 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot b$

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot a$

$A_1 + A_2 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (a+b) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$ ☒

4| a) $m'(t) = \frac{d}{dt} \; m(t)$

$m'(t) = 1{,}2 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} - 0{,}1$

$m(t) = \int m'(t) \, dt = \int \left(1{,}2 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} - 0{,}1\right) dt$

$= -\frac{1{,}2}{0{,}04} \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} - 0{,}1 \cdot t + C$

$m(t) = -30 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} - 0{,}1 \cdot t + C$

Anfangsbed: $m(t=0) = 10$

$-30 \cdot e^{0} + C = 10$

$-30 + C = 10$

$C = 40$

$\Rightarrow \; m(t) = -30 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} - 0{,}1 \cdot t + 40$

b) $-30 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} - 0{,}1 \cdot t + 40 = 0$

$-30 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} = 0{,}1 \cdot t - 40$

Geogebra: Nullstelle bei $t = 400$ [min]

c) Geogebra: Nullstelle bei $t = 500$ [min]

$m^*(t) = -30 \cdot e^{-0{,}04 t} - 0{,}1 \cdot t + 50$

Bei doppelter Menge Wirkstoff bei $t=0$ verlängert sich die Abbauzeit um 25 %

iii) c) $\int \frac{e^{2x} + e^{x}}{e^{2x} - e^{x} - 2} \, dx \qquad x > \ln(2)$

$\Leftrightarrow \frac{e^{x}\cancel{(e^{x}+1)}}{\cancel{(e^{x}+1)}(e^{x}-2)} \rightarrow \int \frac{e^{x}}{e^{x}-2} \, dx \qquad f(x) = e^{x} - 2$

$\Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx$

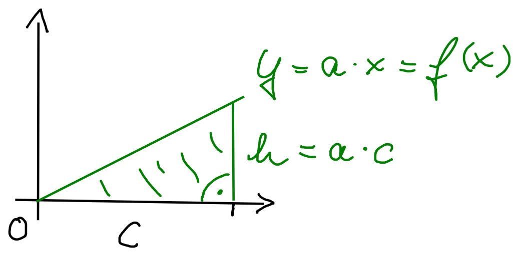
$= \ln(f(x))$

$= \ln(|e^{x} - 2|)$

Blatt 10 Aufgabe 3

3 Integralrechnung - Anwendung 1

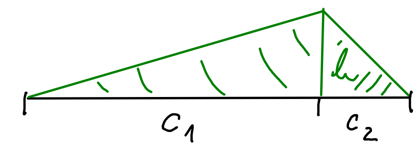
Zeigen Sie mit Integralrechnung, dass die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks gerade die Hälfte des Produktes aus Grundseite und Höhe ist. Verallgemeinern Sie dies dann für beliebige Dreiecke.



$$A = \int_0^c f(x)\,dx = \int_0^c a\cdot x\,dx = \frac{a x^2}{2}\Big|_0^c = \frac{a c^2}{2}$$

$$= \frac{c\cdot h}{2} \; ; \; h = a\cdot c$$

allgemein



$$A = A_1 + A_2 = \frac{c_1\cdot h}{2} + \frac{c_2 h}{2} = \frac{(c_1+c_2)\cdot h}{2}$$

4 Integralrechnung - Anwendung 2

Durch die Einnahme eines Medikaments zur Regulierung des Blutdrucks gelangen Wirkstoffe ins Blut. Die Wirkstoffmenge im Blut kann näherungsweise durch eine Funktion $m(t)$ beschrieben werden. Die Änderung von $m(t)$ mit der Zeit ist die Summe aus einer konstanten Abbaurate und einer Exponentialfunktion.

$$m'(t) = \frac{dm(t)}{dt} = ae^{-b\cdot t} - c \quad ; \quad a = 1.2\,\text{mg/min};\ b = 0.04\,\text{min}^{-1};\ c = 0.1\,\text{mg/min}$$

$$t > 0; \quad t \text{ in min.}$$

Zu Beginn bei $t = 0$ sind 10 mg des Wirkstoffs im Blut.

a) Erstellen Sie die Gleichung für $m(t)$ und stellen Sie diese in GeoGebra dar.
   Beachte $m(t = 0) = 10\,\text{mg}$
b) Wann ist der Wirkstoff vollständig abgebaut?
c) Wie ändert sich die Abbauzeit, wenn anfänglich die die doppelte Menge Wirkstoff im Blut war?

Hinweis zu b) und c): Dies kann nur numerisch ermittelt werden, nutzen Sie GeoGebra.

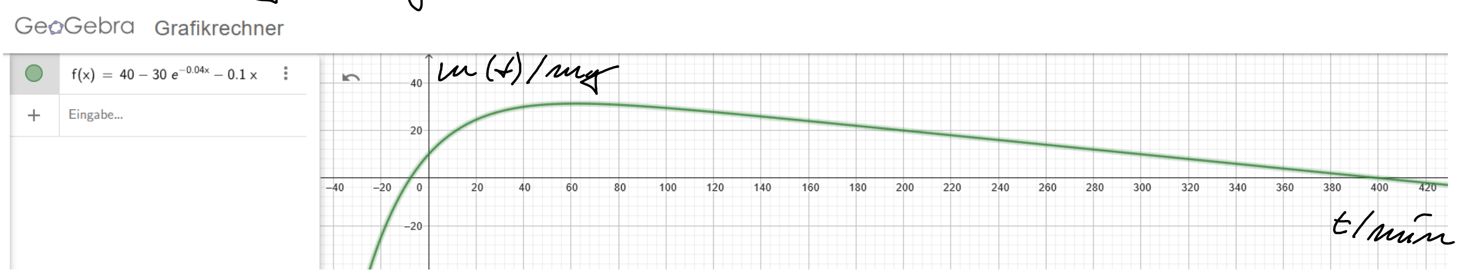
$$m'(t) = a e^{-bt} - c \quad \Big| \int dt$$

$$\int m'(t)\,dt = m(t) = -\frac{a}{b} e^{-bt} - ct + C'$$

$$m(0) = -\frac{a}{b} + C' = 10\text{ mg}$$

$$\Rightarrow C' = 10\text{ mg} + 30\text{ mg} = 40\text{ mg}$$

$$m(t) = 40\text{ mg} - 30\text{ mg}\, e^{-bt} - 0.1\,\frac{\text{mg}}{\text{min}}\cdot t \; ; \; b = 0{,}04\text{ mg/min}$$

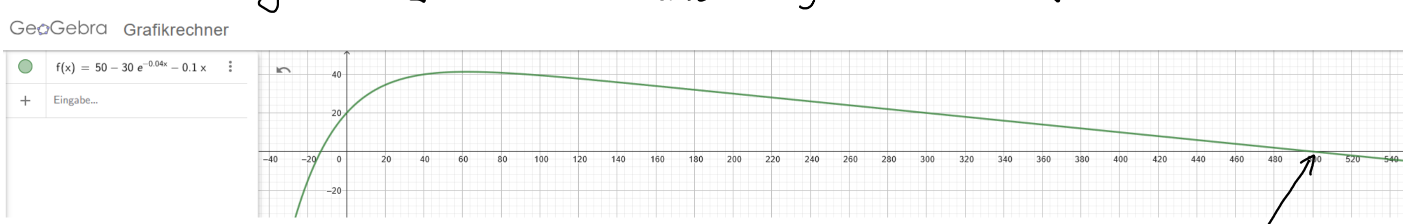


bei $t = 0 \hat{=} 10$ mg, Anstieg (Aufnahme) und dann Abfall

$$m(t_x) = 0 \Rightarrow t_x = 400\text{ min}$$

Wenn $m(0) = 20\text{ mg} \Rightarrow C' = 50\text{ mg}$

$$m(t) = 50\text{ mg} - 30\text{ mg}\, e^{-bt} - 0.1\,\frac{\text{mg}}{\text{min}}\cdot t \; ; \; b = 0{,}04\text{ mg/min}$$



t_x um 500 min.