

Alle Aufgaben lassen sich ohne Taschenrechner lösen.

1 Substitution und partielle Integration

(i) Berechnen Sie die Stammfunktionen

a) $\frac{1}{e^{3x} + 5}$

c) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{(1-x)^2}$

e) $\sin(4x) \sin(6x)$

b) $e^x \cos(x)$

d) $x^2 \ln(x)$

f) $\sin(x)e^{\cos(x)}$

Für Experten ...

g) $\frac{\sqrt{1+x}}{x}$

h) $\frac{1}{\sin(x)}$

(ii) Berechnen Sie $\int \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx$, indem Sie die folgenden Schritte befolgen.

a) Wenden Sie auf das Integral $\int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx$ die Formel für die partielle Integration an:

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx \text{ mit } v' = 1$$

b) Stellen Sie $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$ durch $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n-1}}$ dar.

Hinweis: bei der Berechnung des Falles $n = 1$ kann eine Substitution $x = \tan(y)$ hilfreich sein.

2 Bestimmte und uneigentliche Integrale

(i) Berechnen Sie die Integrale.

a) $\int_{-2}^2 (x^3 - x) dx$

c) $\int_2^4 \frac{|x-3|}{x^2} dx$

e) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 1}$

b) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$

d) $\int_0^3 xe^{3x} dx$

f) $\int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx$

(ii) Lösen Sie das Integral mittels Substitution.

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5} dx$$

(iii) Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale.

a) $\int_2^{11} \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$

b) $\int_0^{\infty} 2xe^{-2x} dx$

c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^3}$

3 Fallende Tropfen - Physik im Herbst - einmal mit Taschenrechner

Hier mal eine interessante Aufgabe, welche etwas Physik, das Volumen einer Kugel, die Fläche vom Kreis und Einheitenumrechnung übt, keine Integrale ☺.

Bitte merken: Fallende Regentropfen sehen nicht so aus, wie wir sie oft malen  oder .

Regentropfen sind fast perfekte **Kugeln** (siehe unten) mit einem Durchmesser von zirka 4 mm. Nebeltropfen haben einen Durchmesser von nur 10 µm. Beide fallen aufgrund der Schwerkraft $F_g = m g$ nach unten, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Die Dichte von Wasser ist 1 g/cm^3 . Die Tropfen werden durch die Luft gebremst, $F_g = F_{\text{Bremskraft}}$. Die Dichte von Luft ist $1.2 \text{ kg/m}^3 = 1.2 \text{ g/L}$. Für die Bremskraft von bewegten Kugeln in Medien gibt es zwei verschiedene Formeln F_{Newton} und F_{Stokes} .

$$F_{\text{Newton}}(v) = \frac{1}{2} \rho_{\text{Luft}} v^2 c_w A \quad \text{mit } c_w = 0.45 \text{ für Kugeln und der Querschnittsfläche } A$$

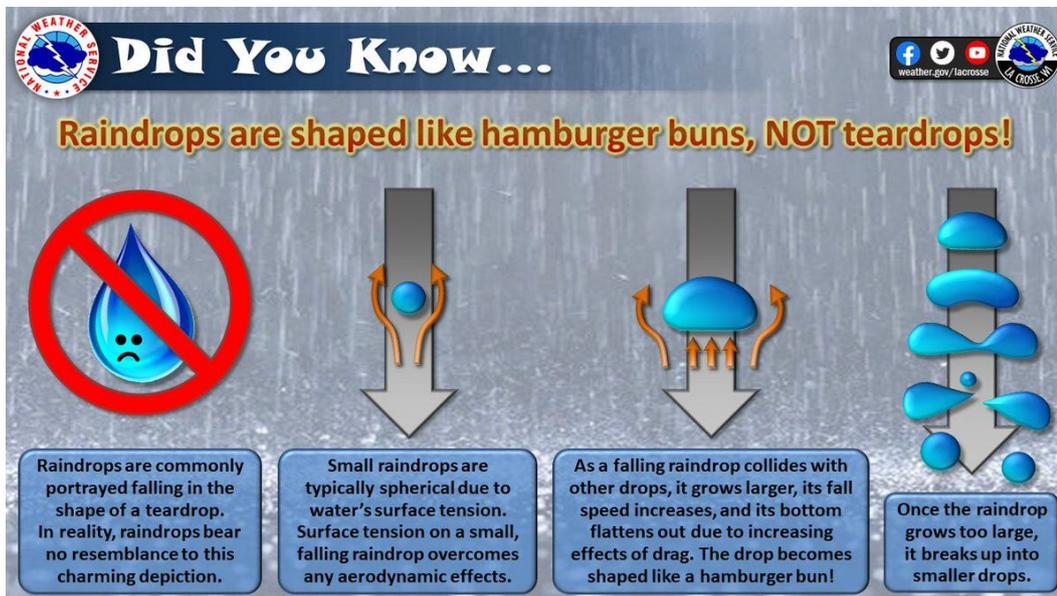
$$F_{\text{Stokes}}(v) = 6\pi \eta_{\text{Luft}} R v \quad \text{mit der Viskosität von Luft } \eta_{\text{Luft}} = 0.02 \text{ mPa s und } 1 \text{ Pa s} = 1 \text{ N m}^{-2} \text{ s}$$

Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Regen- und Nebeltropfen jeweils mit F_{Newton} und F_{Stokes} . Überlegen Sie anhand Ihrer Ergebnisse, wann man welche Formel nehmen muss. Sie wissen dann, welche Formel bei hohen Geschwindigkeiten und welche bei kleinen Geschwindigkeiten richtig ist.

Tip: Nicht verrechnen bei den Einheiten.

Berechnen Sie, wie lange der herbstliche Morgennebel mit einer Höhe von 10 m benötigt, um zu Boden zu fallen.

Gut zu Wissen



Did You Know...

Raindrops are shaped like hamburger buns, NOT teardrops!

Raindrops are commonly portrayed falling in the shape of a teardrop. In reality, raindrops bear no resemblance to this charming depiction.

Small raindrops are typically spherical due to water's surface tension. Surface tension on a small, falling raindrop overcomes any aerodynamic effects.

As a falling raindrop collides with other drops, it grows larger, its fall speed increases, and its bottom flattens out due to increasing effects of drag. The drop becomes shaped like a hamburger bun!

Once the raindrop grows too large, it breaks up into smaller drops.

Bildquelle: https://www.kwwl.com/weather/blog/shape-of-a-raindrop-teardrop-or-hamburger-bun/article_0c8b79dc-14e7-55c8-b595-3a4de0ba8835.html

Dies erklärt auch, warum es keine Regentropfen mit 30 cm Durchmesser gibt, zum Glück ☺.

Das Wasser hat nur eine Tropfenform, so lange es noch am Wasserhahn hängt. Danach formt es die Oberflächenspannung sofort zu einer Kugel. Leider können wir dies dann nicht mehr mit dem bloßen Auge sehen, weil die Kugel sich zu schnell bewegt. Doch Aufnahmen mit einer Hochgeschwindigkeitskamera zeigen dies unmittelbar.



Bildquelle: <https://www.science-sparks.com/what-shape-is-a-raindrop>