1 Komplexe Zahlen

(i) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie den Betrag.

a) $z_1 = 1 + i$ b) $z_2 = 2 - 3i$ c) $z_3 = \sqrt{3} + i$

(ii) Skizzieren Sie die Menge aller komplexen Zahlen, die der jeweiligen Bedingung genügen.

a) $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leqslant 4$ b) $|z| \leqslant 2\mathrm{Re}(z)$

(iii) Finden Sie die Nullstellen über dem Zahlenraum $\mathbb{C}$.

$$x^2 - 10x + 34 = 0$$

(iv) Vereinfachen Sie auf die Form $a + ib$.

a) $(1+i)^5$ b) $\dfrac{1}{2+3i}$ c) $\dfrac{(-i+1)^3}{i+2}$

(v) Bestimmen Sie alle $x_n = a_n + \mathrm{i}b_n$ welche die Gleihung $x^3 + 27 = 0$ erflüllen. Überprüfen Sie Ihr Ergebniss, indem Sie x_n^3 berechnen.

(vi) Jede komplexe Zahl ist ein Punkt auf der komplexen Ebene $(\mathrm{Re}, \mathrm{Im})$. Dieser lässt sich in Polarkoordinaten ausdrücken. Die komplexe Exponentialfunktion ist gegeben als

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)\,.$$

Somit lässt sich jede komplexe Zahl schreiben als
$z = a + i \cdot b = r \cdot e^{i\phi},\ r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Berechnen Sie $\ln(z)$ mit $z = 3i + 4$.

(vii) Schreiben Sie $z = 1 + i$ in Polardarstellung und berechnen Sie z^5, siehe (iv).

(viii) Berechnen Sie

a) i^3 b) i^4 c) i^{13} d) $(-\mathrm{i})^3$

2 Integralrechnung

Finden Sie die Stammfunktionen und vereinfachen Sie diese so weit wie möglich und berechnen Sie das Integral.

a) $\displaystyle\int \frac{\frac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)} - \frac{4}{\cos^2(x)}}{\tan^3(x) - \tan^2(x) - 4\tan(x) + 4}\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$

Viel Spaß beim Lösen. ☺