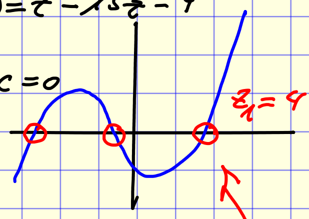
Komplexe Zahlen

· Mittelalter Bombelli (ca. 1550), Problem mit $f(z)=z^3-15z-4$

· Cardano (1501–1576), allg. Lösungsformel für $x^3+ax^2+bx+c=0$



zuerst $x = z - \frac{a}{3} \Rightarrow z^3+pz+q=0$

dann Ansatz $z^3=(u+v)^3 = u^3+3uv(u+v)+v^3$

Lösungsformel von Cardano ... lange Rechnung

für $z^3-15z-4=0 \Rightarrow z_1 = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$

Betrachten

$$(2+\sqrt{a})^3 = 8+12\sqrt{a}+6a+\sqrt{a}^3$$

wenn $a=-1$ und $\sqrt{-1}^3=-\sqrt{-1}$

$$= 8+12\sqrt{-1}-6-\sqrt{-1} = 2+11\sqrt{-1} = (2+\sqrt{-1})^3$$

$\Rightarrow$ Lsg: $z_1 = \sqrt[\cancel{3}]{(2+\sqrt{-1})^{\cancel{3}}}+\sqrt[\cancel{3}]{(2-\sqrt{-1})^{\cancel{3}}} = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} = 4$

passt? $f(4)=4^3-15\cdot 4-4=0$ ✓

$E=mc^2$

mit Polynomdivision ergibt sich $z_2=-2+\sqrt{3}$; $z_3=-2-\sqrt{3}$

Wir lernen: komplexe Zahlen sind Rechenhilfsmittel ?!

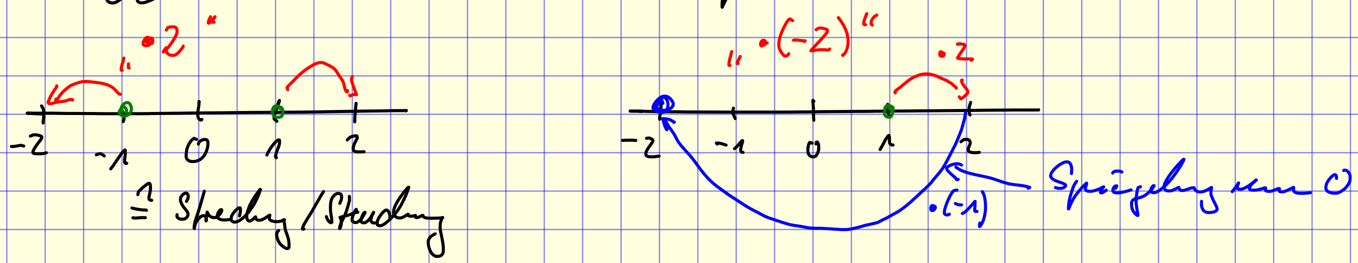
für Quantenphysik unerlässlich

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t)$$

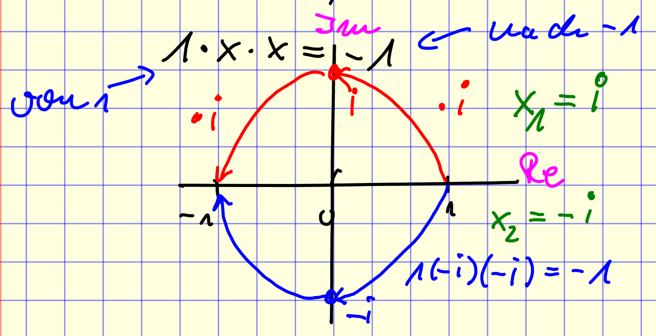
Schrödinger-Gl.

Motivation: Erweiterung der reellen Zahlen analog $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

zurück zu reellen Zahlen: Multiplikation Zahlenstrahl

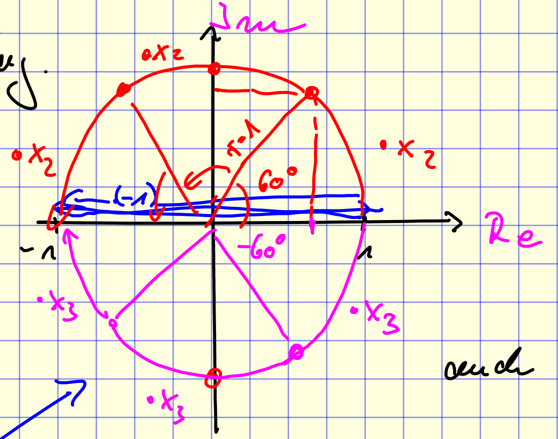


Wollen wissen, was zu tun um



$$1\cdot x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm i$$

analog



$1 \cdot x \cdot x \cdot x = -1$

$x_1 = -1$;

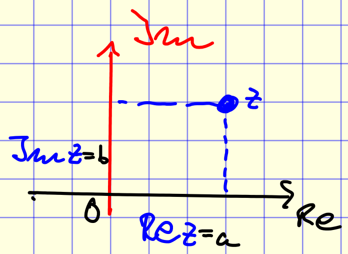
$x_2 = \cos 60° + i \cdot \sin 60°$

$x_3 = \cos 60° - i \sin 60° = \cos(-60°) + i \sin(-60°)$

auch $x_2 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_3 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$

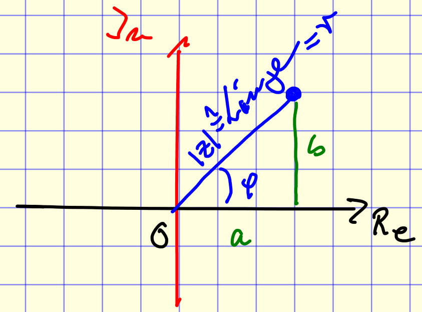
Gaußsche Zahlenebene



Angabe von z: brauchen zwei reelle Zahlen

1. kartesische Darstellung

$z = a + i \cdot b$ a − Realteil, b − Imaginärteil



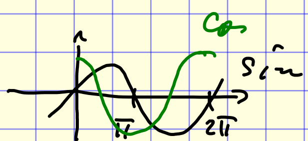
φ; ϕ phi

2. Polarkoordinaten

$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$; $r, \varphi \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$

$r = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$; $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ $\Rightarrow$ $\varphi = \arctan\frac{b}{a}$; $\arctan(a,b)$

$a = r\cos\varphi$; $b = r\sin\varphi$



3. exponentielle Darstellung (Beweis später)

$z = r e^{i\varphi}$ weil $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ⟸ Eulersche Formel

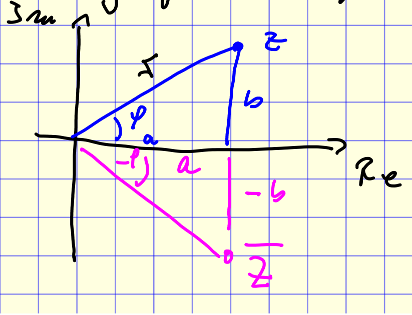
speziell $\boxed{e^{i\pi} = -1}$ oder $e^{i\pi} + 1 = 0$

Bem. $e^{i(\pi + 2\pi)} = e^{i\pi} = -1$

Rechnen: Gleichheit, wenn $z_1 = z_2$ g.d.w. $\mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2$ $\wedge$; & $\mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2$

oder $r_1 = r_2$; $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi \cdot k$; $k \in \mathbb{Z}$

Def.: konjugiert komplex $z = a + ib \Rightarrow \bar{z} = a - ib$



Spiegelung am reellen Achse

wenn $z + \bar{z} = 2a = 2\,\mathrm{Re}$

$z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - iab + iba - i \cdot i \cdot b^2$
$= a^2 + b^2 = r^2$

auch $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = r^2$

Rechnen wie $\mathbb{R}$ mit $i \cdot i = -1$; $\neq$ $i = \sqrt{-1}$

Summe $\quad z_1 + z_2 = (a_1 + i b_1) + (a_2 + i b_2) = (a_1 + a_2) + i (b_1 + b_2)$

Differenz analog $z_1 - z_2$

Produkt $\quad z_1 \cdot z_2 = (a_1 + i b_1) \cdot (a_2 + i b_2) = a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i a_2 b_1 - b_1 b_2$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i (a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

oder $\quad z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$; $r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$

$i\varphi_2 \in \mathbb{C}$

$e^{a+ib} = e^a e^{ib}$

Quotienten: $\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + i b_1}{a_2 + i b_2} \cdot 1 = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{(a_1 + i b_1)(a_2 - i b_2)}{(a_2 + i b_2)(a_2 - i b_2)} = \frac{(a_1 + i b_1)(a_2 - i b_2)}{a^2 + b^2}$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Logo, es gilt $\quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$; $z_1 (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$

Beweis, dass $\quad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$

Taylorreihe $\quad \sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

NR $(i\varphi)^2 = -\varphi^2$

$(i\varphi)^3 = -i\varphi^3 = i\varphi \cdot (i\varphi)^2$

$(i\varphi)^4 = \varphi^4$

$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{i\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} + \dots$$

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi}$$