

Allgemeine Relativitätstheorie

Malte Henkel

^aLaboratoire de Physique de Chimie Théoriques (CNRS UMR 7019),
Université de Lorraine **Nancy**, France

^bCentro de Física Teórica e Computacional, Universidade de Lisboa, Portugal

E-Post/courriel: `malte.henkel@univ-lorraine.fr`

Vorlesung Wintersemester 2020/21, Université de Sarrebruck

Some further reading

- L. Ryder, *General relativity*, Cambridge Univ. Press (2009)
- T.P. Cheng, *Relativity, Gravitation and Cosmology*, 2^e
Oxford Univ. Press (2010)
- S. Weinberg, *Gravitation and cosmology*, Wiley (1978)
- C.M. Will, *Confrontation between general relativity and experiments*,
Liv. Rev. Relativity **9**, 3 (2006) & **17**, 4 (2014)
- C.M. Will, *... und Einstein hatte doch Recht/Les enfants d'Einstein*,
Springer (1986)

Komplette Übersicht über die Vorlesung

Vorlesung I: Historische Einführung

Vorlesung II: Einführung & Spezielle Relativitätstheorie I

Vorlesung III: Spezielle Relativitätstheorie II

Vorlesung IV: Spezielle Relativitätstheorie III

Vorlesung V: Differentialgeometrie I

Vorlesung I

Allgemeine Relativitätstheorie ist eine Theorie der **Gravitation**

dazu muß die 'Spezielle Relativitätstheorie' erweitert werden

Physik auf großen Längenskalen und für große Massen

(Sonnensystem und größer, Sterne und schwerer)

heute auch mit technologischen Anwendungen (GPS)

Theorie der klassischen Physik, ohne Quanteneffekte

ungewöhnlich: große Bedeutung der Zeit-Raum-Geometrie

1687 I. NEWTON: *Principia*

1845/46 U. LEVERRIER: Vorhersage der Existenz des Planeten Neptun

gefunden von J. GALLÉ & H. D'ARREST

~**1900** U. LEVERRIER, S. NEWCOMB: unerklärte Störungen in der

Merkurbahn

Vergleich mit bekannten klassischen Theorien

Gravitation

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^2} \mathbf{e}_r$$

falls Masse $M = M(t)$ zeitabhängig

$$\mathbf{F}(t) = -G \frac{mM(t)}{r^2} \mathbf{e}_r$$

?

Coulomb (el-stat.)

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_r$$

falls Ladung $q_1 = q_1(t)$ zeitabhängig

$$\mathbf{F}(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1(t) q_2}{r^2} \mathbf{e}_r$$

im Elektromagnetismus ist
Ausbreitungsgeschwindigkeit endlich
also **retardierte Kraft**

$$q_1 = q_1(t - r/c)$$

⇒ mit spezieller Relativität
kompatibel

? muß man Newton's Gleichungen so verändern, daß $M = M(t - r/c)$?

* würde sehr einschneidende Änderungen der Newtonschen Theorie verlangen

* so auch inkompatibel mit astronomischen Beobachtungen

Gravitationsfeld $\mathbf{g} = \frac{1}{m}\mathbf{F}$
das Newton'sche Gesetz schreibt sich also

analog zum. el. Feld $\mathbf{E} = \frac{1}{q_1}\mathbf{F}$

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{e}_r = -\nabla\phi, \quad \phi(r) = -\frac{GM}{r}$$

Das **Gravitationspotential** $\phi = \phi(r)$ erhält man aus einer **Feldgleichung**

$$\nabla^2\phi = 0 \quad ; \quad \text{Vakuum - Laplacegleichung}$$

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \quad ; \quad \text{Materie - Poissongleichung}$$

N.B.: wegen $\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$, hat man für Massenpunkt die Dichte $\rho(\mathbf{r}) = M\delta(\mathbf{r})$
und damit $\nabla^2\phi = 4\pi GM\delta(\mathbf{r})$ und endlich $\phi = -\frac{GM}{r}$ wie es sein sollte

Schwierigkeit: das ist eine Gleichung für nur ein Feld $\phi = \phi(\mathbf{r})$,
keine Möglichkeit einer Zeitabhängigkeit

⇒ inkompatibel mit spezieller Relativität, die Zeitabhängigkeiten in Form
sogenannter **Vierervektoren** (t, \mathbf{r}) verlangt

nötig: konzeptuelle Basis !

Relativitätsprinzip

Für zwei Inertialsysteme, mit einer konstanten Relativgeschwindigkeit zwischen ihnen, transformieren sich die Naturgesetze kovariant.

dafür gibt es zwei bekannte Formulierungen:

(a) nicht-relativistische Form

$$t' = t \quad , \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t \quad ; \quad \text{Galilei-Transformation}$$

2. Newton'sches Axiom $\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2}$ wird unter Galileitransformation

$$\mathbf{F}' = m \frac{d^2 \mathbf{r}'(t)}{dt^2} = m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = \mathbf{F}$$

(b) allgemeine Form, für beliebige Geschwindigkeiten

$$t' = \frac{t - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \quad , \quad \mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}t}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \quad ; \quad \text{Lorentz-Transformation}$$

mit c : Lichtgeschwindigkeit. Ist Kovarianzgruppe der Maxwellgleichungen.

1.1 Äquivalenzprinzip

GALILEI ~ 1600 *alle Körper fallen im Schwerfeld gleich schnell*

Experiment: man läßt im Vakuum eine Feder und eine Stahlkugel gleichzeitig fallen und beobachtet den Zeitpunkt des Aufschlagens auf dem Boden

für ein nettes Video dazu, z.B.: <https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs>

Einsteins Gedankenexperiment: wiederhole das Fallexperiment zweimal, einmal im Schwerfeld \mathbf{g} , zum anderen unter einer konstanten Beschleunigung $\mathbf{a} = \mathbf{g}$

Ergebnis: beide Experimente liefern das gleiche Resultat !

ad 1 Wiederholung des Galilei'schen Experiments

ad 2 wegen des Trägheitsprinzips bleiben die Körper wo sie sind und das Labor bewegt sich

Experimentell kann man nicht unterscheiden, ob man

(1) in einem Gravitationsfeld ist oder (2) im leeren Raum beschleunigt ist

Äquivalenzprinzip (EINSTEIN 1911)

Ein beschleunigtes Bezugssystem ist äquivalent zu einem Gravitationsfeld

Äquivalenzprinzip (EINSTEIN 1911)

Ein beschleunigtes Bezugssystem ist äquivalent zu einem Gravitationsfeld

Grundlage jeder relativistischen Gravitationstheorie

Konsequenz:

* Teilchen, mit Beschleunigung \mathbf{a} : $\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}$,

mit m_i : **träge** (inertiale) **Masse**

* Teilchen, im Gravitationsfeld \mathbf{g} : $\mathbf{F} = m_g \mathbf{a}$,

mit m_g : **schwere** (gravitationelle) **Masse**

für frei fallendes Teilchen gelten beide Relation und die Kräfte sind gleich

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m_i} \mathbf{F} = \frac{m_g}{m_i} \mathbf{g}$$

Galilei-Experiment: m_g/m_i hat den gleichen Wert für alle Materialien !

mit passender Wahl der Einheiten:

$$m_i = m_g$$

Träge und schwere Massen sind grundsätzlich gleich.

Äquivalenzprinzip (EINSTEIN 1911)

Ein beschleunigtes Bezugssystem ist äquivalent zu einem Gravitationsfeld

*Träge und schwere Massen sind **grundsätzlich** gleich.*

N.B.: träge Masse m_i : Masse der Materiebausteine + Bindungsenergie
⇒ die gravitationnelle Bindung trägt zur Bindungsenergie bei
⇒ starke nichtlineare Effekte

a contrario: der Elektromagnetismus à la Maxwell ist linear,
da das elektromagnetische Feld selber keine elektrische Ladung hat

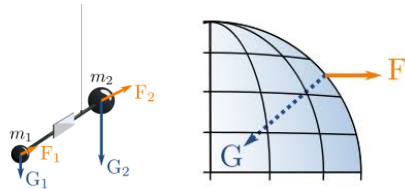
Das Eötvös-Experiment

Drehwaage, mit zwei Massen aus verschiedenen Materialien
zunächst Ruhestellung & Gleichgewicht



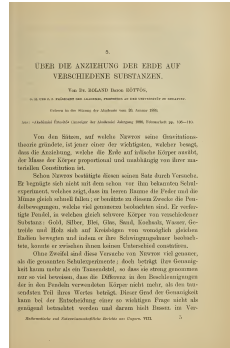
$$\Rightarrow F_{\text{inertie}} = F_{\text{centrifuge}}$$

$$\Rightarrow \text{hängt ab von } m_i/m_g$$



Quelle: wikipedia

man dreht den kompletten Apparat um 180°
falls $m_i/m_g \neq 1$ Rotationsbewegung
Ergebnis: keine Bewegung !



Math. Naturwiss. Berichte aus Ungarn **8**, 65 (1890)

„Wenn überhaupt eine Differenz der Schwere der Körper von gleicher Masse, jedoch verschiedener Substanz vorhanden ist, ist diese . . . kleiner als ein Zwanzigmillionstel.“

klassisches Eötvös-Experiment: Rotation der Drehwaage im Labor
alternativ kann man die Erdrotation benutzen, um den Apparat zu drehen
falls Massen aus Gold (Au) und Aluminium (Al), hat man:

$$\text{Grav-kraft der Sonne auf Au: } F_{\text{Au}} = \frac{GM}{r^2} (m_g)_{\text{Au}}$$

$$\text{Beschleunigung in Richtung Sonne: } a_{\text{Au}} = \frac{GM}{r^2} \left(\frac{m_g}{m_i} \right)_{\text{Au}}$$

Sei ferner $\frac{m_g}{m_i} = 1 + \delta$. Dann Drehmoment auf der Drehwaage (Armlänge 2ℓ)

$$T = \frac{GM\ell}{r^2} [(m_g)_{\text{Au}} - (m_g)_{\text{Al}}]$$

Im Allgemeinen, $T = I\alpha$, $I = m_i\ell^2$ Trägheitsmoment. Damit wird der Drehwinkel

$$\alpha = \frac{GM}{\ell r^2} (\delta_{\text{Au}} - \delta_{\text{Al}})$$

12h später: Rollen von Au und Al sind vertauscht \Rightarrow **periodisches Signal in α**
Abwesenheit eines solches Effektes

$$\delta < 3 \cdot 10^{-13}$$

also maximale Differenz zwischen träger und schwere Masse, $\frac{m_g}{m_i} = 1 + \delta$

$$\delta < 3 \cdot 10^{-13}$$

N.B.: implizite Hypothese: $m_{i,\text{Beschleunigung}} = m_{i,\text{Rotation}}$
scheint bisher nicht explizit geprüft

N.B.': dies ist ein *lokales* Experiment !

Beschleunigungen können Gravitationsfelder nur in einem Punkt kompensieren
sonst Gezeitenkräfte oder Effekte der Raumkrümmung

1.2 Optik und Gravitation

in der Mechanik, nach dem Äquivalenzprinzip, sind Beschleunigungen und Gravitation ununterscheidbar

? gilt das auch für die Optik ?

(a) Lichtstrahl, der gegen ein Schwerefeld steigt

Frequenz ν , Energie $E = h\nu$, mit h : Planck'sche Konstante
andererseits (spez. Relativitätstheorie) $E = mc^2$

$$\text{'Photonenmasse'} \quad m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$$

beim Aufsteigen wird die Arbeit geleistet $W = m\Delta U$, U : Gravitationspotential
nach dem Anstieg haben die Photonen die Energie $E' = E - W = h\nu'$

$$\Rightarrow \nu' = \nu \left(1 - \frac{\Delta U}{c^2}\right)$$

Frequenzänderung $\Delta\nu := \nu - \nu'$

$$\boxed{\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta U}{c^2}}$$

N.B.: Anleihen bei Quantentheorie nicht wirklich nötig, da h aus Endergebnis herausfällt

(b) Lichtstrahl, in beschleunigtem Labor

- * Lichtstrahl verläßt Quelle S zur Zeit $t = 0$,
die Quelle wird nach oben mit a konstant beschleunigt
- * Lichtstrahl kommt bei Beobachter B an zur Zeit $t = H/c$.
Zu dieser Zeit hat B die Geschwindigkeit $v = at = aH/c$.
- * zwei Wellenberge starten in S mit dem Zeitintervall $dt = \frac{1}{\nu}$

(1) Betrachtung à la Galilei: Zeitintervall zwischen Maxima in B :

$$dt' = dt + \Delta t = dt + v \frac{dt}{c} = dt \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \frac{1}{\nu'}$$

$$\Rightarrow \frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{1+v/c} \simeq 1 - \frac{v}{c} \Rightarrow \frac{\Delta \nu}{\nu} \simeq \frac{v}{c} = \frac{aH}{c^2}$$

(2) Korrektur aus spez. Relativitätstheorie:

$$dt' = \gamma(dt + \Delta t) = \gamma dt \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \frac{1}{\nu'} \quad , \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

der Korrekturfaktor ist quadratisch in v/c , also in führender Ordnung $\frac{\nu'}{\nu} \simeq 1 - \frac{v}{c} + \dots$ Damit

$$\boxed{\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{v}{c} = \frac{aH}{c^2} = \frac{\Delta U}{c^2}}$$

da für Schwerfeld $\Delta U = aH = gH$. **Äquivalenzprinzip bestätigt.**

Pound-Rebka-Snyder Experiment

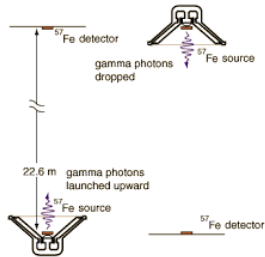
direkte Messung der Frequenzverschiebung

ursprünglich in einem Turm von ≈ 22 [m] Höhe $\Rightarrow \Delta\nu/\nu \sim 10^{-15}$

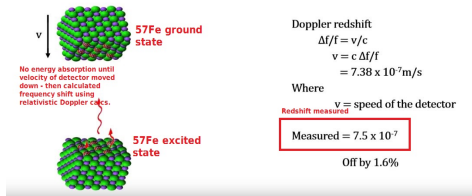
das ist weniger als die natürliche Linienbreite ! Dazu Kerne in Bewegung !

\Rightarrow verwende Mößbauereffekt für Resonanzabsorption

Durchführung mit ^{57}Fe , da dann Mößbauereffekt bei Raumtemperatur



Pound – Rebka Experiment



erste Experimente Genauigkeiten von $\sim 1\%$, heute $\simeq 0.01\%$

für numerische Anwendungen: **sphärische Massenverteilung** = Stern (!).
 Dann Gravitationspotential $U(R) \sim -\frac{GM}{R}$, mit R : Sternradius. Daher

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{GM}{Rc^2} = \frac{1}{2} \frac{2GM}{c^2} \frac{1}{R} =: \frac{1}{2} \frac{\mathcal{R}}{R}$$

hierbei ist $\mathcal{R} := 2GMc^{-2}$ der **Schwarzschildradius**.

Objekt	Masse [kg]	Radius [m]	\mathcal{R} [m]	\mathcal{R}/R
Kern	10^{-26}	10^{-15}	10^{-53}	10^{-38}
Atom	10^{-26}	10^{-10}	10^{-53}	10^{-43}
Mensch	100	1	10^{-25}	10^{-25}
Erde	$6 \cdot 10^{24}$	$6 \cdot 10^6$	0.009	10^{-9}
Sonne	$2 \cdot 10^{30}$	$7 \cdot 10^8$	3000	10^{-6}
weißer Zwerg	$2 \cdot 10^{30}$	10^7	3000	0.0003
Neutronenstern	$2 \cdot 10^{30}$	10^4	3000	0.3
Galaxie	10^{41}	10^{21}	10^{14}	10^{-7}

⇒ Relativistische Effekte dominant, falls $\mathcal{R}/R \approx 1$.

alternative Darstellung: Zeitdilatation durch Gravitation

Frequenzänderung durch Grav-feld: $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta U}{c^2}$

in B empfängt man das in O emittierte Signal mit Frequenz $\nu' < \nu$

aber: kein Wellenmaximum ist unterwegs 'verloren gegangen' !

⇒ *in der Nähe schwerer Massen ist der Gang von Uhren verlangsamt*

falls man in B pro Zeiteinheit ν_B Wellenlängen emittiert, empfängt man, bei physikalisch gleichem Prozeß, nur $\nu_O = \nu_B - \Delta\nu$ Wellenlängen
eine Uhr in O mißt also die Zeit

$$T_O = \frac{\nu_B - \Delta\nu}{\nu_B} T_B = \left(1 - \frac{\Delta\nu}{\nu}\right) T_B = \left(1 - \frac{\Delta U}{c^2}\right) T_B$$

während im Orte B die Zeit T_B verstreicht

zur Verdeutlichung: nehme Uhr B im Unendlichen, Uhr O auf einer Kugel der Masse M und mit Radius R . Dann

$$T_O = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{R}}{R}\right) T_B$$

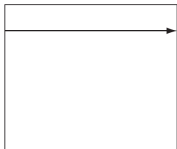
eine Uhr auf der Sonnenoberfläche ist um 10^{-6} in Bezug auf eine Uhr auf der Erde verlangsamt

Vorlesung II

1.3 Krümmungen

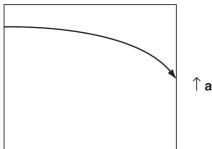
neues Gedankenexperiment aus der Optik:

ein Lichtstrahl durchquert horizontal einen Kasten Quelle: L. Ryder *General Relativity* (2009)



(a)

(a) in Ruhe



(b)

(b) mit konstanter Beschleunigung \mathbf{a}

Feststellung:

im beschleunigten Fall Licht auf einer parabolischen Bahn \neq gerade Bahn !

mit Äquivalenzprinzip: das Gleiche muß auch für Bewegung von Licht im Gravitationsfeld gelten

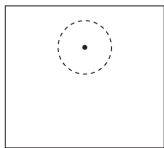
zur Erinnerung: **Fermat'sches Prinzip:**

das Licht breitet sich so aus, daß die Laufzeit minimal wird

zur Erinnerung: daraus alle Gesetze der geometrischen Optik
(geradlinige Ausbreitung; Snell'sches Brechungsgesetz etc.)

in einem Gravitationsfeld ist die kürzeste Linie zwischen zwei Punkte keine Gerade

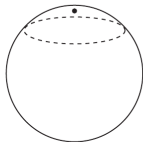
☞ alle Bewegungsgesetze müssen für gekrümmte Räume formuliert werden



$$C = 2\pi a$$



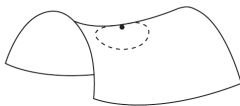
Zero curvature



$$C < 2\pi a$$



Positive curvature

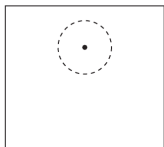


$$C > 2\pi a$$



Negative curvature

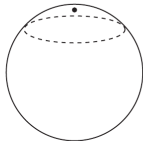
? wie kann man eine Raumkrümmung messen ?



$$C = 2\pi a$$



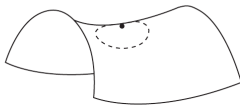
Zero curvature



$$C < 2\pi a$$



Positive curvature



$$C > 2\pi a$$



Negative curvature

☞ prüfe geometrische Eigenschaften wie Umfang C oder Fläche A eines Kreises

Kugel	$C < 2\pi a$	$A < \pi a^2$	positive Krümmung
Ebene	$C = 2\pi a$	$A = \pi a^2$	keine Krümmung (flach)
Sattel	$C > 2\pi a$	$A > \pi a^2$	negative Krümmung

* um eine Kugel auf die Ebene abzubilden, muß man sie 'zerreißen'

* um einen Sattel auf die Ebene abzubilden, muß man ihn 'überschieben'

☞ *Krümmung ist eine intrinsische Eigenschaft eines Raumes*

2. Spezielle Relativitätstheorie

2.1. Lorentztransformation

wir beginnen mit einer Wiederholung der Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie

betrachte **Inertialsysteme** $I: (t, x, y, z)$ und $I': (t', x', y', z')$

diese habe eine konstante Relativgeschwindigkeit \mathbf{v}

? wie beschreibt man den Übergang von I nach I' ?

(a) **Galilei-Newton**: sei $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$, dann **Galileitransformation**

$$t' = t, \quad x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z$$

mit der inversen Transformation $t = t', x = x' + vt', y = y', z = z'$.

Additionstheorem der Geschwindigkeiten:

für $I \xrightarrow{v} I' \xrightarrow{w} I''$ hat man $I \xrightarrow{u} I''$ mit

$t'' = t' = t, x'' = x' - wt' = x - (v + w)t, y'' = y' = y, z'' = z' = z,$

so daß die Relativgeschwindigkeit u zwischen I und I'' ist

$$u = v + w$$

N.B.: dies ist eine Gruppeneigenschaft – **Galileigruppe**

? Galileitransformationen auf Maxwell'sche Elektrodynamik anwendbar ?
NEIN, denn es gibt eine *universelle Geschwindigkeit*

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \simeq 3 \cdot 10^8 [\text{m/s}]$$

Diese Lichtgeschwindigkeit ist eine *absolute* Geschwindigkeit ! Das ist mit Galilei-Relativität inkompatibel, vgl. Additionstheorem.

(b) für **Elektrodynamik**: sei $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$, verwende **Lorentztransformation**

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z \quad ; \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}$$

? verschiedene Formen des Relativitätsprinzips in Mechanik und Elektrodynamik ?
? Kompatibilität mit universeller Geschwindigkeit ?

👉 EINSTEIN 1905: ! Lorentztransformation folgt aus Relativitätsprinzip !

Beweis: für eine geradlinige Transformation, ohne Rotationen

allgemeiner Ansatz für Koordinatentransformation, mit Relativgeschwindigkeit \mathbf{v}

$$t' = a(v)t + b(v)\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}$$
$$\mathbf{r}' = c(v)\mathbf{r} + \frac{d(v)}{v^2}\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) + e(v)\mathbf{v}t$$

wobei die (skalaren) Funktionen a, b, c, d, e zu bestimmen sind.

Da keine Rotationen, nur Abhängigkeit vom Betrag $v = |\mathbf{v}|$.

(1) *Der Ursprung von I' bewegt sich mit Geschwindigkeit \mathbf{v} .*

Das bedeutet: falls $\mathbf{r} = \mathbf{v}t$, dann muß gelten $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$.

$$\Rightarrow \mathbf{r}' = c\mathbf{v}t + d\mathbf{v}t + e\mathbf{v}t = (c + d + e)\mathbf{v}t \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \Rightarrow \boxed{c + d + e = 0}$$

(2) *Die inverse Transformation hat Relativgeschwindigkeit $-\mathbf{v}$.*

$$t = a(v)t' - b(v)\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'$$
$$\mathbf{r} = c(v)\mathbf{r}' + \frac{d(v)}{v^2}\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}') - e(v)\mathbf{v}t'$$

einsetzen ergibt zunächst für die Zeittransformation:

$$t' = (a^2 - bev^2)t' + b(c + d - a)\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' \Rightarrow \boxed{a^2 - bev^2 = 1, a = c + d}$$

und dann für die Raumtransformation

$$\mathbf{r}' = c^2\mathbf{r}' + (-ce - de + ae)t' + \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}') \left(2\frac{cd}{v^2} + \frac{d^2}{v^2} - eb \right)$$

woraus folgt: $\boxed{c^2 = 1, a = c + d, 2cd + v^2\left(\frac{d^2}{v^2} - eb\right) = 0}$.

man kann fixieren $c = c(v) = 1$, da $c = -1$ eine Rotation um 180° wäre (vorher ausgeschlossen). Dann bleibt

$$\boxed{d = a - 1, c = 1, e = -a, b = \frac{1 - a^2}{av^2}}$$

\Rightarrow es bleibt nur noch eine Funktion $a = a(v)$ unbestimmt.

(3) Additionstheorem der Geschwindigkeiten:

für $I \xrightarrow{v} I' \xrightarrow{w} I''$ hat man $I \xrightarrow{u} I''$ mit $u = u(v, w)$

nehme $\mathbf{v} \parallel \mathbf{w} \parallel \mathbf{e}_x$

$$\begin{aligned}t' &= a(v)t + \frac{1 - a^2(v)}{va(v)}r, & t'' &= a(w)t' + \frac{1 - a^2(w)}{wa(w)}r', \\r' &= a(v)r - va(v)t, & r'' &= a(w)r' - wa(w)t'\end{aligned}$$

und man erwartet ebenfalls die gleiche Form für $I \xrightarrow{u} I''$

$$t'' = a(u)t + \frac{1 - a^2(u)}{ua(u)}r, \quad r'' = a(u)r - ua(u)t$$

Andererseits gibt die Hintereinanderausführung von $I \xrightarrow{v} I' \xrightarrow{w} I''$

$$\begin{aligned}t'' &= \left(a(w)a(v) - va(v)\frac{1 - a^2(w)}{wa(w)} \right) t + \left(\frac{1 - a^2(w)}{wa(w)}a(v) + a(w)\frac{1 - a^2(v)}{va(v)} \right) r \\r'' &= \left(a(w)a(v) - wa(w)\frac{1 - a^2(v)}{va(v)} \right) r - \left(a(w)va(v) - wa(w)a(v) \right) t\end{aligned}$$

Vergleich: Hintereinanderausführung von $I \xrightarrow{v} I' \xrightarrow{w} I''$

$$t'' = \left(a(w)a(v) - va(v) \frac{1 - a^2(w)}{wa(w)} \right) t + \left(\frac{1 - a^2(w)}{wa(w)} a(v) + a(w) \frac{1 - a^2(v)}{va(v)} \right) r$$

$$r'' = \left(a(w)a(v) - wa(w) \frac{1 - a^2(v)}{va(v)} \right) r - \left(a(w)va(v) - wa(w)a(v) \right) t$$

mit erwarteter direkter Form für $I \xrightarrow{u} I''$

$$t'' = a(u)t + \frac{1 - a^2(u)}{ua(u)} r, \quad r'' = a(u)r - ua(u)t$$

Vergleich: Hintereinanderausführung von $I \xrightarrow{v} I' \xrightarrow{w} I''$

$$t'' = \left(a(w)a(v) - va(v) \frac{1 - a^2(w)}{wa(w)} \right) t + \left(\frac{1 - a^2(w)}{wa(w)} a(v) + a(w) \frac{1 - a^2(v)}{va(v)} \right) r$$

$$r'' = \left(a(w)a(v) - wa(w) \frac{1 - a^2(v)}{va(v)} \right) r - \left(a(w)va(v) - wa(w)a(v) \right) t$$

mit erwarteter direkter Form für $I \xrightarrow{u} I''$

$$t'' = a(u)t + \frac{1 - a^2(u)}{ua(u)} r, \quad r'' = a(u)r - ua(u)t$$

das ergibt dann die Funktionalgleichung

$$a(u) \stackrel{!}{=} a(w)a(v) - va(v) \frac{1 - a^2(w)}{wa(w)} = a(w)a(v) - wa(w) \frac{1 - a^2(v)}{va(v)}$$

Vergleich: Hintereinanderausführung von $I \xrightarrow{v} I' \xrightarrow{w} I''$

$$t'' = \left(a(w)a(v) - va(v)\frac{1-a^2(w)}{wa(w)} \right) t + \left(\frac{1-a^2(w)}{wa(w)}a(v) + a(w)\frac{1-a^2(v)}{va(v)} \right) r$$

$$r'' = \left(a(w)a(v) - wa(w)\frac{1-a^2(v)}{va(v)} \right) r - \left(a(w)va(v) - wa(w)a(v) \right) t$$

mit erwarteter direkter Form für $I \xrightarrow{u} I''$

$$t'' = a(u)t + \frac{1-a^2(u)}{ua(u)}r, \quad r'' = a(u)r - ua(u)t$$

und man bekommt so eine Relation zwischen $a(v)$ und $a(w)$

$$a(w)a(v) - va(v)\frac{1-a^2(w)}{wa(w)} = a(w)a(v) - wa(w)\frac{1-a^2(v)}{va(v)}$$

Vergleich: Hintereinanderausführung von $I \xrightarrow{v} I' \xrightarrow{w} I''$

$$t'' = \left(a(w)a(v) - va(v)\frac{1-a^2(w)}{wa(w)} \right) t + \left(\frac{1-a^2(w)}{wa(w)}a(v) + a(w)\frac{1-a^2(v)}{va(v)} \right) r$$

$$r'' = \left(a(w)a(v) - wa(w)\frac{1-a^2(v)}{va(v)} \right) r - \left(a(w)va(v) - wa(w)a(v) \right) t$$

mit erwarteter direkter Form für $I \xrightarrow{u} I''$

$$t'' = a(u)t + \frac{1-a^2(u)}{ua(u)}r, \quad r'' = a(u)r - ua(u)t$$

und man bekommt so eine Relation zwischen $a(v)$ und $a(w)$

$$a(w)a(v) - va(v)\frac{1-a^2(w)}{wa(w)} = a(w)a(v) - wa(w)\frac{1-a^2(v)}{va(v)}$$

und diese Beziehung lässt sich wie folgt umschreiben

$$\frac{1 - a^2(w)}{w^2 a^2(w)} = \frac{1 - a^2(v)}{v^2 a^2(v)} = -K^2 = \text{cste.}$$

⇒ Konstante K kann von keiner der Relativgeschwindigkeiten v, w abhängen

⇒ K ist eine **universelle Konstante** und hat die **Dimension einer inversen Geschwindigkeit**

☞ **das Relativitätsprinzip liefert die Existenz einer absoluten Geschwindigkeit**

in Übereinstimmung mit der Elektrodynamik wählt man $K = 1/c$

Explizit hat man dann

$$a(v) = (1 - K^2 v^2)^{-1/2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad b(v) = -K^2 a(v) = -\frac{a(v)}{c^2}$$

Das ist die angekündigte Form der Lorentztransformation.

Q.E.D.

- * Lorentztransformationen sind die allgemeinsten Transformationen, die mit dem Relativitätsprinzip und der Gruppeneigenschaft kompatibel sind.
- * Es handelt sich keineswegs um eine mathematische Kuriosität, sondern um eine wesentliche physikalische Einsicht.
- * Da nur sehr schwache Voraussetzungen, Ergebnis 'fast überall' gültig.

N.B.: *deswegen sind experimentelle Evidenzen, die die Gültigkeit der Lorentztransformation bezweifeln, selber mit großer Vorsicht zu betrachten.*

rezentes Beispiel: Behauptung, daß sogenannte Neutrinos (ungeladene, fast masselose Elementarteilchen) schneller als Licht fliegen sollten, statistisch mit mehr als 6σ bestätigt **OPERA-Experiment 2011**

Des Rätsels Lösung: **Kalibrationsfehler**, da ein Stecker nachlässig eingeführt worden war (!). Ergab $73_{[ns]}$ Verzögerung.

- * Im Grenzfall $K \rightarrow 0$ (oder $c \rightarrow \infty$) erhält man die Galilei-Transformation.

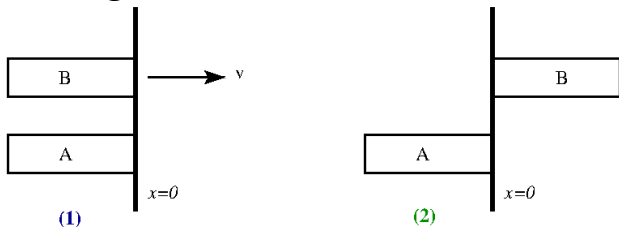
! Außergewöhnliche Behauptungen benötigen außerordentlich gute Evidenzen !

Konsequenzen der Lorentztransformation

Lorentztransformation in x -Richtung, ohne Drehung, Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z \quad ; \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}$$

betrachte zwei Züge A , B , mit fester Länge L und Relativgeschwindigkeit v ,
und zwei **Ereignisse**:



- (1) Der Anfang des Zuges B fährt am Anfang des Zuges A vorbei
- (2) Das Ende des Zuges B fährt am Anfang des Zuges A vorbei

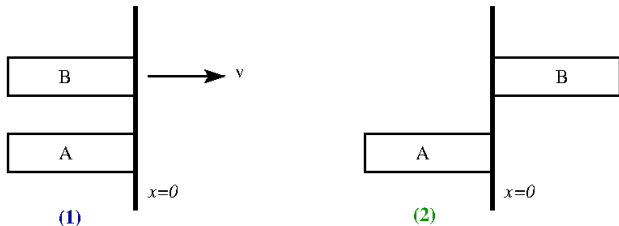
wir haben zwei Inertialsysteme:

(I) das Ruhesystem, in dem der Zug A steht: (t, x)

(I') das mit dem Zug B bewegte System: (t', x')

? welches Zeitintervall zwischen den beiden Ereignissen ?

zur Vereinfachung: Zug A in Ruhe angenommen



für Ereignis 1: die Raumkoordinaten $x = 0, x' = 0$,
die Zeitkoordinaten $t = 0, t' = 0$, also formal

Ereignis 1: $(t_1, x_1) = (0, 0), (t'_1, x'_1) = (0, 0)$.

für Ereignis 2: passiert nach der Zeit T im Inertialsystem I des Zuges A,
also formal

Ereignis 2: $(t_2, x_2) = (T, 0), (t'_2, x'_2) = (T', -L)$.

mit der Lorentztransformation

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z \quad ; \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} > 1$$

erhält man für das Ereignis 2: $(t_2, x_2) = (T, 0)$, $(t'_2, x'_2) = (T', -L)$
die Transformationen $t'_2 = T' = \gamma T$ und $x'_2 = -L = \gamma(-vT)$.

Das gibt die Relationen

$$L = \gamma v T, \quad T' = \gamma T > T$$

in einem bewegten Inertialsystem vergeht die Zeit langsamer als in Ruhe.

das ist die **relativistische Zeitdilatation**

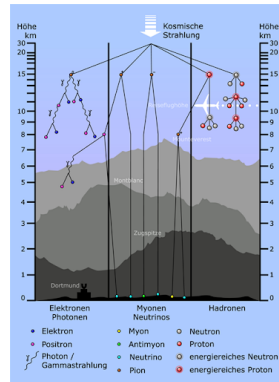
für rezente Überprüfung: Bateman *et al.*, Phys. Rev. Lett. **113**, 120405 (2014).

das **klassische Beispiel für relativistische Zeitdilatation**: **Myonenzerfall**

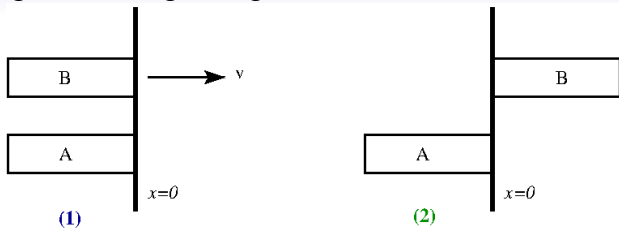
Myonen sind massive Elementarteilchen ('schwere Elektronen'), aber instabil. Die wesentliche Zerfallsreaktion ist

$$\mu^{\pm} \rightarrow e^{\pm} \nu \bar{\nu} \quad , \quad \text{Lebensdauer } \tau_{\mu} \simeq 2[\mu\text{s}]$$

Myonen werden in der Hochatmosphäre durch kosmische Teilchen produziert, in Höhen $H \sim 12[\text{km}]$. Sie haben so viel Energie, daß sie praktisch mit Lichtgeschwindigkeit c zur Erde fliegen. Im Ruhesystem können Myonen die Maximaldistanz $c\tau \simeq 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-6}[\text{m}] = 600[\text{m}] \ll H$ zurücklegen. Da Myonen auf der Erdoberfläche leicht nachzuweisen sind (Praktikumsversuch !), braucht man ein relativistisches $\gamma \sim 20$, damit die Myonen zur Erdoberfläche kommen können.



? Länge L' des Zuges B, gesehen von einem Beobachter im Zug A ?



per Definition: nach der Zeit T sieht der Beobachter in A das Zugende von B vorbeifahren. Damit

$$L' = vT = \frac{L}{\gamma} < L$$

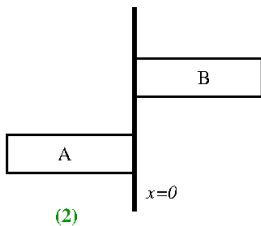
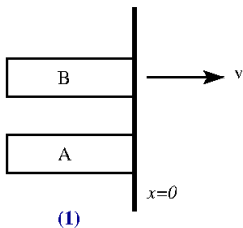
in einem bewegten Inertialsystem sind die Längen kürzer als in Ruhe.

das ist die **relativistische Längenkontraktion** (LORENTZ-FITZGERALD)

noch einmal Myonenzerfall: im Inertialsystem der Myonen wird der Abstand zur Erde um $\gamma \sim 20$ verkürzt.

relativistische Invariante: *hat in allen Inertialsystemen den gleichen Wert*

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$



in unserem Beispiel: $dy = dz = 0$

* im Ruhesystem (Zug A):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 = -c^2 (t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 = -c^2 T^2$$

* im bewegten System (Zug B):

rigider Zug, also $x'_2 - x'_1 = L$

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt'^2 + dx'^2 = -c^2 (t'_2 - t'_1)^2 + (x'_2 - x'_1)^2 = -c^2 T'^2 + L^2 \\ &= -c^2 \gamma^2 T^2 + \gamma^2 v^2 T^2 = -\gamma^2 T^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) c^2 = -c^2 T^2 \end{aligned}$$

und die Ergebnisse stimmen überein, wie es sein soll.

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Inertialsystem, <i>n</i>	repère d'inertie, <i>m</i>
Relativitätsprinzip, <i>n</i>	principe de relativité, <i>f</i>
Kovarianzgruppe, <i>f</i>	groupe de covariance, <i>m</i>
Lichtgeschwindigkeit, <i>f</i>	vitesse de lumière, <i>f</i>
Schwerefeld, <i>n</i>	pesanteur, <i>f</i>
Gedankenexperiment, <i>n</i>	expérience de pensée, <i>f</i>
schwere Masse, <i>f</i>	masse gravitationnelle, <i>f</i>
träge Masse, <i>f</i>	masse inertielle, <i>f</i>
Drehwaage, <i>f</i>	balance de torsion, <i>f</i>
Drehmoment, <i>n</i>	couple, <i>m</i>
Trägheitsmoment, <i>n</i>	moment d'inertie, <i>m</i>
Krümmung, <i>f</i>	courbure, <i>f</i>
krumm	courbe
flach	plat
Kugel, <i>f</i>	sphère, <i>f</i>
Ebene, <i>f</i>	plan, <i>m</i>
Sattel, <i>m</i>	selle, <i>f</i>
bezweifeln	mettre en doute

le genre grammatical des substantifs (*m,f,n*) est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

Vorlesung III

zur Wiederholung:

spezielle Relativitätstheorie: Wechsel $I \xrightarrow{v} I'$ von Inertialsystemen

konzeptuelle Grundlage: **Relativitätsprinzip** GALILEI 1638, EINSTEIN 1905

Für zwei Inertialsysteme, mit einer konstanten Relativgeschwindigkeit zwischen ihnen, transformieren sich die Naturgesetze kovariant.

aus dem Relativitätsprinzip folgt, für beliebige Geschwindigkeiten:

$$t' = \frac{t - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad ; \quad \text{Lorentz-Transformation}$$

mit einer universellen Geschwindigkeit c : Lichtgeschwindigkeit.

Konsequenzen:

- 1 Zeitdilatation
- 2 Lorentz-Längenkontraktion
- 3 relativistische Invariante $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

2.2 Vierervektoren

viele Rechnungen lassen sich mit Vierervektoren formal vereinfachen

Definition: Ein Vektor \mathbf{x} mit den Komponenten x^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$ heißt **Vierervektor**, falls die Komponenten unter der Poincarégruppe (Lorentztransformationen, Rotationen, Translationen in Zeit und Raum) kovariant transformieren

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

$$\text{oder } x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + a^\mu$$

man schreibt im kartesischen Zeitortsraum

$$\mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z).$$

Invariante: $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.

Summenkonvention: über doppelte Indices wird stets summiert !

griechisch: $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; lateinisch $i, j = 1, 2, 3$

in kartesischen Koordinaten hat der metrische Tensor $\eta_{\mu\nu}$ die Form

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Warnung: bisweilen wird für η eine Konvention mit entgegengesetztem Vorzeichen benutzt.

in sphärischen Koordinaten $x = (ct, r, \theta, \phi)$ ist die Invariante

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

und der metrische Tensor $\eta_{\mu\nu}$ hat die Form

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Definition: die **Eigenzeit** (frz. **temps propre**) τ ist gegeben durch τ ist lorentzinvariant

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2$$

die Eigenzeit ist die Zeit, die im Ruhesystem eines Elementarteilchens gemessen wird

Definition: die **Vierergeschwindigkeit** ist gegeben durch $u := dx/d\tau$, d.h.

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right)$$

und der **Viererimpuls** durch $p := m u$, wobei m die Masse des Teilchens ist.

Interpretation der Komponenten des Viererimpulses:

* Raumkomponenten:

benutze $dt/d\tau = \gamma \rightarrow$ Übung

$$p^i = m \frac{dx^i}{d\tau} = m \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^i}{dt} = \underbrace{m \gamma}_{\text{effektive Masse}} v^i$$

mit v^i : Komponenten der Dreier-Geschwindigkeit $v^i = \frac{dx^i}{dt}$

* Zeitkomponente: $p^0 = mc \frac{dt}{d\tau}$. Für die Energie hat man

$$E = p^0 c = mc^2 \frac{dt}{d\tau} = mc^2 \gamma$$

für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$:

$$E = mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \simeq \underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{kinetische Energie (N.R.)}} + \dots$$

das gibt die berühmte Formel $E = mc^2$

EINSTEIN 1905

Zusammenhang der Lorentztransformation mit der Invarianten

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

damit wird die Invariante in beiden Inertialsystemen

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \stackrel{!}{=} \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma dx^\rho dx^\sigma$$

ergibt **Orthogonalitätsrelation**

$$\boxed{\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma = \eta_{\rho\sigma}}$$

in einem euklidischen Raum, wo dann gelten würde $\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, wäre das die Charakterisierung von orthogonalen Transformationen, also Drehungen. Was bedeutet diese Bedingung im **Minkowskiraum** der Relativitätstheorie ?

Beispiele zur Deutung der Orthogonalität der Lorentztransformationen:

(a) Rotationen im Raum (hier um die z-Achse)

$t' = t$, $x' = x \cos \theta + y \sin \theta$, $y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$, $z' = z$. Damit Matrix

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \theta & \sin \theta & \\ & -\sin \theta & \cos \theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

und das ist eine wohlbekannte orthogonale Drehmatrix.

(b) Lorentzboost in x-Richtung:

$x'^0 = ct' = \gamma(x^0 + \frac{v}{c}x^1)$, $x'^1 = x' = \gamma(x^1 + \frac{v}{c}x^0)$, $x'^2 = x^2$, $x'^3 = x^3$. Matrixform:

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \frac{v}{c} & & \\ \gamma \frac{v}{c} & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

(c) **Rapidity** ϕ : man schreibt $\gamma = \cosh \phi$, und $\frac{v}{c}\gamma = \sinh \phi$

$\Rightarrow \tanh \phi = \frac{v}{c}$

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi & & \\ \sinh \phi & \cosh \phi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } v \ll c \text{ gilt } \phi \simeq v/c$$

man nennt dies auch eine **hyperbolische Rotation**.

zweifacher Wechsel des Inertialsystems $I \xrightarrow{v} I' \xrightarrow{v'} I''$, mit Rapiditäten ϕ, ϕ' ,
 erfolgt durch Matrixmultiplikation hier angenommen, daß $v \parallel v' \parallel e_x$

$$\begin{pmatrix} \cosh \phi' & \sinh \phi' & & \\ \sinh \phi' & \cosh \phi' & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi & & \\ \sinh \phi & \cosh \phi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi + \phi') & \sinh(\phi + \phi') & & \\ \sinh(\phi + \phi') & \cosh(\phi + \phi') & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

verwende auch: $\cosh(\phi_1 + \phi_2) = \cosh \phi_1 \cosh \phi_2 + \sinh \phi_1 \sinh \phi_2$ und $\sinh(\phi_1 + \phi_2) = \sinh \phi_1 \cosh \phi_2 + \cosh \phi_1 \sinh \phi_2$

damit hat die Transformation $I \xrightarrow{V} I''$ die Rapidität $\tanh \Phi = \frac{V}{c}$ mit

$$\Phi = \phi + \phi'$$

mit der Identität $\tanh(\phi_1 + \phi_2) = \frac{\tanh \phi_1 + \tanh \phi_2}{1 + \tanh \phi_1 \tanh \phi_2}$ ergibt dies

gilt so nur, falls $v \parallel v'$

$$V = \frac{v + v'}{1 + vv'/c^2}$$

das **relativistische Additionstheorem der Geschwindigkeiten**

EINSTEIN 1905

N.B.: falls $v' = c$, dann $V = c$ ☞ die Lichtgeschwindigkeit c ist invariant

N.B.: für $v, v' \ll c$ zurück zum Galileischen Additionstheorem.

etwas mehr zu den Indizes

für den Vierervektor x unterscheidet man

(i) **kontravariante Komponenten** x^μ

(ii) **kovariante Komponenten** $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$

für die Invariante: $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$

Beispiele für den Viererort x :

(A) kartesisch: $x^\mu = (ct, x, y, z)$, $x_\mu = (-ct, x, y, z)$

(B) sphärisch: $x^\mu = (ct, r, \theta, \phi)$, $x_\mu = (-ct, r, r^2\theta, r^2 \sin^2(\theta)\phi)$

Lemma: Für den Vierervektor x ist $x^2 := x \cdot x := x_\mu x^\mu$ lorentzinvariant.

Beweis: die Lorentztransformation ist $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$. Damit

$$x'^2 = x' \cdot x' = \eta_{\rho\sigma} x'^\rho x'^\sigma = \underbrace{\eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu}_{=\eta_{\mu\nu}} x^\mu x^\nu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x \cdot x = x^2$$

wegen der Orthogonalitätsrelation.

Q.E.D.

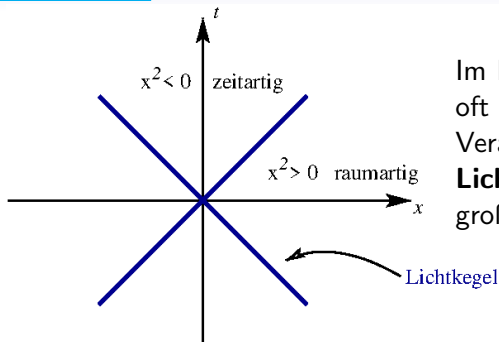
Beispiele dazu: (A) Vierergeschwindigkeit $u \cdot u = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = u_\mu u^\mu = -c^2$

(B) Viererimpuls $p \cdot p = m^2 u \cdot u = -m^2 c^2$

☞ die Masse m eines Teilchens ist lorentzinvariant

→ Charakterisierung !

der Lichtkegel



Im Minkowskiraum verwendet man oft ein **Zeit-Raum-Diagramm** zur Veranschaulichung. Dabei spielt der **Lichtkegel** $x^2 = c^2 t^2 - \mathbf{x}^2 = 0$ eine große Rolle.

Definition: Falls für den Vierervektor x gilt

$$\left\{ \begin{array}{l} x \cdot x < 0 \quad \text{dann ist } x \text{ **zeitartig** (frz. **temporel**)} \\ x \cdot x = 0 \quad \text{dann ist } x \text{ **lichtartig** (frz. **lumineux**)} \\ x \cdot x > 0 \quad \text{dann ist } x \text{ **raumartig** (frz. **spatial**)} \end{array} \right.$$

diese Einteilung ist lorentzinvariant.

zwei Ereignisse können nur in kausaler Wechselwirkung stehen, falls ihre Viererorte zueinander zeitartig sind.

2.3 Das Zwillingsparadoxon & beschleunigte Bewegung

(A) die Geschichte der zwei Zwillinge:

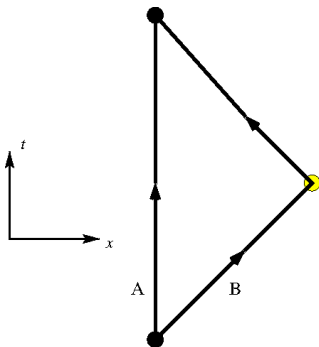
A bleibt auf der Erde, B macht eine lange Reise und kehrt zurück

☞ da B sich gegen A bewegt, sollte die Zeit für ihn langsamer vergehen

⇒ am Ende der Reise ist B jünger als A

das Paradoxon: man könnte glauben, es gäbe eine Symmetrie zwischen A und B. Dann sollte A jünger als B sein.

da B eine Reise mit Beschleunigung unternimmt (Weltlinie B hat einen Knick !), gibt es diese Symmetrie nicht.



2.3 Das Zwillingsparadoxon & beschleunigte Bewegung

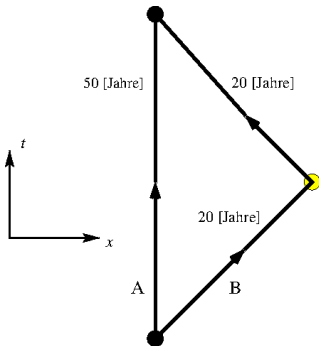
(A) die Geschichte der zwei Zwillinge:

A bleibt auf der Erde, B macht eine lange Reise und kehrt zurück

☞ da B sich gegen A bewegt, sollte die Zeit für ihn langsamer vergehen
⇒ am Ende der Reise ist B jünger als A

das Paradoxon: man könnte glauben, es gäbe eine Symmetrie zwischen A und B. Dann sollte A jünger als B sein.

da B eine Reise mit Beschleunigung unternimmt (Weltlinie B hat einen Knick !), gibt es diese Symmetrie nicht.



Zahlenbeispiel Abstand Erde-Stern 15 Lichtjahre, Reisegeschwindigkeit $0.6c$

Reisezeit A/R, gesehen von A: $2 \cdot \frac{15}{0.6} [\text{Jahre}] = 2 \cdot 25 [\text{Jahre}] = 50 [\text{Jahre}]$

Reisezeit A/R, gesehen von B: Zeit-Dilatationsfaktor $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} = 0.8$,

damit insgesamt $2 \cdot 0.8 \cdot 25 [\text{Jahre}] = 2 \cdot 20 [\text{Jahre}] = 40 [\text{Jahre}]$

wir wollen zeigen, daß die Zeit für die Beschleunigung gegenüber der Reisezeit vernachlässigbar ist

Viergeschwindigkeit $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ mit τ : Eigenzeit

$$u_\mu u^\mu = -c^2 \Rightarrow \frac{d}{d\tau}(u_\mu u^\mu) = 0 = 2\dot{u}^\mu u_\mu$$

wobei **Viererbeschleunigung** $a^\mu := \frac{du^\mu}{d\tau} = \dot{u}^\mu$ also $a^\mu u_\mu = 0$

Spezialfall: **konstante Beschleunigung** g in x-Richtung. Die Definitionen sind

$$c \frac{dt}{d\tau} = u^0, \quad \frac{dx^1}{d\tau} = u^1, \quad \frac{du^0}{d\tau} = a^0, \quad \frac{du^1}{d\tau} = a^1$$

mit den Konsistenzbedingungen

$$-(u^0)^2 + (u^1)^2 = -c^2, \quad -u^0 a^0 + u^1 a^1 = 0 \text{ und dazu } a^\mu a_\mu = -(a^0)^2 + (a^1)^2 = g^2$$

die Konsistenzbedingungen haben die Lösung

$$a^0 = \frac{g}{c} u^1, \quad a^1 = \frac{g}{c} u^0$$

haben Lösung der Konsistenzbedingung: $a^0 = \frac{g}{c} u^1$, $a^1 = \frac{g}{c} u^0$ und Definitionen

$$c \frac{dt}{d\tau} = u^0, \quad \frac{dx^1}{d\tau} = u^1, \quad \frac{du^0}{d\tau} = a^0, \quad \frac{du^1}{d\tau} = a^1$$

daraus Differentialgleichungen, fuer $u^0 = u^0(\tau)$ und $u^1 = u^1(\tau)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u^0}{d\tau^2} &= \frac{da^0}{d\tau} = \frac{g}{c} \frac{du^1}{d\tau} = \frac{g}{c} a^1 = \frac{g^2}{c^2} u^0 \\ \frac{d^2 u^1}{d\tau^2} &= \frac{da^1}{d\tau} = \frac{g}{c} \frac{du^0}{d\tau} = \frac{g}{c} a^0 = \frac{g^2}{c^2} u^1 \end{aligned}$$

damit Lösung $u^1(\tau) = Ae^{g\tau/c} + Be^{-g\tau/c}$.

Fixiere Konstanten A, B aus Anfangsbedingungen $t \rightarrow 0$ impliziert $\tau \rightarrow 0$

$$u^1(0) = 0, \quad \left. \frac{du^1}{d\tau} \right|_{\tau=0} = a^1(0) = g$$

das liefert $A = -B = c/2$ und damit

$$u^1(\tau) = \frac{dx}{d\tau} = c \sinh \frac{g\tau}{c}$$

$$a^0(\tau) = \frac{du^0(\tau)}{d\tau} = g \sinh \frac{g\tau}{c} \Rightarrow u^0(\tau) = c \cosh \frac{g\tau}{c} \quad \text{wegen } u^0(0) = \frac{c}{g} a^1(0) = c$$

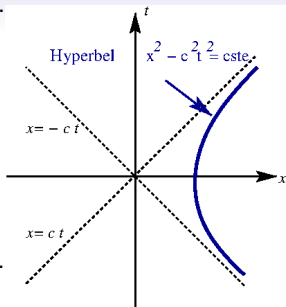
haben Lösung $u^1(\tau) = c \sinh \frac{g\tau}{c}$ und $u^0(\tau) = c \cosh \frac{g\tau}{c}$.

Die letzten Integrationen liefern

$$ct(\tau) = \frac{c^2}{g} \sinh \frac{g\tau}{c}, \quad x(\tau) = \frac{c^2}{g} \cosh \frac{g\tau}{c}$$

im nicht-rel. Limes: $t \simeq \tau, x \simeq \frac{c^2}{g} + \frac{1}{2}gt^2 + \dots$, wie erwartet für beschleunigte Bewegung

geometrisch ist die Bahn eine Hyperbel $x^2 - c^2t^2 = \frac{c^4}{g^2}$.



Frage: wieviel Eigenzeit vergeht, bis B Reisegeschwindigkeit $v = \frac{3}{5}c$ erreicht ?

Antwort: bei konstanter Beschleunigung $u^1 = \frac{dx}{d\tau} = c \sinh \frac{g\tau}{c} \stackrel{!}{=} \frac{3}{5}c$

$$\Rightarrow \tau = \frac{c}{g} \operatorname{arsinh}(0.6) \simeq 0.55 \frac{c}{g}$$

Zahlenbeispiel: Erdschwerefeld (mehr geht für lange Reisen nicht) $g \simeq 10[\text{m/s}^2]$

$$\Rightarrow \tau \simeq 1.6 \cdot 10^7[\text{s}] \sim 6[\text{Monate}] \ll 20[\text{Jahre}]$$

dies illustriert, daß die Beschleunigungsphase nur einen kleinen Einfluß hat, wesentlich ist der nicht-inertiale Wechsel der Bezugssysteme zwischen den zwei Teilen der Reise !

- (B)** Rotationsbewegung: (i) System R in Ruhe,
(ii) System R' im Rotation um die z -Achse, konstante Winkelgeschwindigkeit ω

$$t' = t, \quad r' = r, \quad \phi' = \phi - \omega t, \quad z' = z$$

im System R (Zylinderkoordinaten): $ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$
im System R' :

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt'^2 + dr'^2 + r^2 (d\phi' + \omega dt')^2 + dz'^2 \\ &= -(c^2 - \omega^2 r'^2) dt'^2 + 2\omega r'^2 dt' d\phi' + dr'^2 + r^2 d\phi'^2 + dz'^2 \\ &= g_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} \end{aligned}$$

mit dem metrischen Tensor

mit Wahl $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \phi, z)$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{\omega^2 r'^2}{c^2}) & 0 & \frac{\omega r'^2}{c} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\omega r'^2}{c} & 0 & r'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Nichtdiagonalelemente beschreiben die Effekte der Rotation

zur Vereinfachung: Notationswechsel im System R' : Koordinaten (t, r, ϕ, z)

also $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00} (dx^0)^2 + 2g_{0i} dx^0 dx^i + g_{ik} dx^i dx^k$ mit

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}) & 0 & \frac{\omega r^2}{c} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\omega r^2}{c} & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

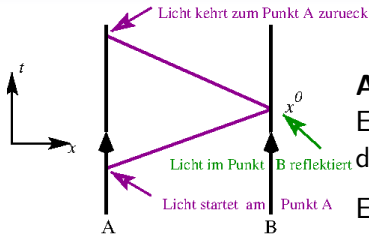
* zeitliche Trennung: Ereignisse (x^0, \mathbf{x}^i) und $(x^0 + dx^0, \mathbf{x}^i)$

Invariante: $ds^2 = g_{00} c^2 dt^2 = -(c^2 - \omega^2 r^2) dt^2 = -c^2 d\tau^2$ mit τ : Eigenzeit
das ergibt

$$d\tau = \sqrt{-g_{00}} dt = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} dt < dt$$

*eine Uhr auf einem sich drehenden Rad geht langsamer als eine Uhr im
Zentrum des Rades*

* räumliche Trennung: wie mißt man Abstände ?



Abstandmessung mit Lichtstrahlen:

Abstand d_{AB} : gegeben durch in A gemessene Eigenzeit zwischen Lichtemission und Detektion des reflektierten Lichts

Emissionszeiten: $x^0 + dx^{0,(i)}$, $i = 1, 2$

Invariante: $0 = ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0i}dx^0dx^i + g_{ik}dx^idx^k$ Licht lichtartig

$$\Rightarrow dx^0 = \frac{1}{g_{00}} \left(-g_{0i}dx^i \pm \sqrt{(g_{0i}g_{0k} - g_{00}g_{ik})dx^idx^k} \right) \quad (\#)$$

Zeitintervall zwischen Emission und Detektion der Lichtstrahlen

$$\Delta x^0 = dx^{0,(1)} - dx^{0,(2)} = -\frac{2}{g_{00}} \sqrt{(g_{0i}g_{0k} - g_{00}g_{ik})dx^idx^k} \geq 0$$

Abstand $d_{AB} = dl = \frac{1}{2}c\Delta\tau$, $c\Delta\tau = \sqrt{-g_{00}} \Delta x^0$, woraus

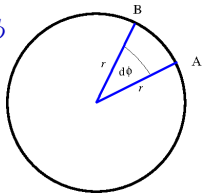
$$d_{AB}^2 = dl^2 = \left(g_{ik} - \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}} \right) dx^idx^k$$

Illustration der Abstandsformel, für Punkt A: (r, ϕ, z) ; Punkt B: $(r, \phi + d\phi, z)$

$$d_{AB}^2 = dl^2 = \left(g_{ik} - \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}} \right) dx^i dx^k$$

(1) Fall ohne Rotation $\omega = 0$: $d\ell^2 = r^2 d\phi^2 \Rightarrow dl = rd\phi$
 Umfang des Vollkreises

$$C = \oint dl = \int_0^{2\pi} r d\phi = 2\pi r$$



(2) Fall mit Rotation $\omega \neq 0$: benutze

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right), \quad g_{20} = g_{02} = \frac{\omega r^2}{c}, \quad g_{22} = r^2$$

$$d\ell^2 = \left(g_{22} - \frac{g_{02}g_{20}}{g_{00}} \right) d\phi^2 = \left(r^2 + \frac{\omega^4 r^4 / c^4}{1 - \omega^2 r^2 / c^2} \right) d\phi^2 \simeq r^2 \left(1 + \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \right) d\phi^2$$

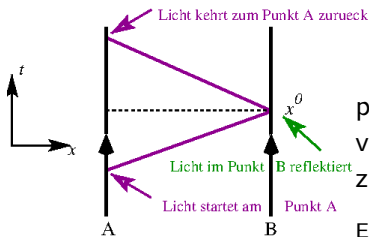
also, für $\omega r \ll c$: $dl \simeq r \left(1 + \frac{\omega^2 r^2}{2c^2} \right) d\phi$

Kreisumfang $C = \oint dl \simeq 2\pi r \left(1 + \frac{\omega^2 r^2}{2c^2} \right) > 2\pi r$

der Raum einer rotierenden Kreisscheibe ist gekrümmt (der Zeitraum ist aber flach !)

(C) Synchronisation von Uhren

? wie definiert man die Gleichzeitigkeit von zwei Ereignissen A und B ?



Austausch von Lichtstrahlen:

per Definition ist der in A gemessene Mittelwert von Emissionszeit und Empfangszeit die Zeit, die zu der in B gemessenen Zeit x^0 synchron ist.

Emissionszeiten: $x^0 + dx^{0,(i)}$, $i = 1, 2$

falls die Bezugssysteme auch noch rotieren:

vgl. Gl. (#) aus (B)

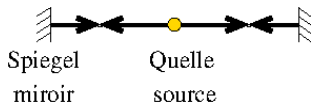
$$x^0 + \frac{1}{2}(dx^{0,(1)} + dx^{0,(2)}) = x^0 - \frac{g_{0i}dx^i}{g_{00}} =: x^0 + \overline{\Delta}x^0$$

falls R' rotiert, ist $g_{0i} \neq 0$, daher $\overline{\Delta}x^0 \neq 0$

☞ man kann nicht alle Uhren entlang einer geschlossenen Kurve synchronisieren,

$$\text{weil } \overline{\Delta}x^0 = - \oint \frac{g_{0i}dx^i}{g_{00}} \neq 0$$

Sagnac-Effekt



zwei Lichtstrahlen verlassen gleichzeitig die Quelle werden reflektiert und interferieren. Wie ändert sich die Interferenz, wenn der Apparat rotiert ?

<https://www.youtube.com/watch?v=fm7zLp3m8b4>

Zeitunterschied für Rückkehr zur Quelle

$$\overline{\Delta t} = \frac{1}{c} \overline{\Delta x^0} = \frac{1}{c} \oint \frac{g_{0i} dx^i}{g_{00}} = \frac{1}{c^2} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\omega r^2}{1 - \omega r^2/c^2} \simeq \frac{2\pi\omega r^2}{c^2}$$

Eigenzeit $\overline{\Delta \tau} = \sqrt{-g_{00}} \overline{\Delta t} \simeq \overline{\Delta t}$

optischer Weg $l \pm \overline{\Delta l} = 2\pi r \pm c \overline{\Delta t} = L \pm \frac{2\pi\omega r^2}{c}$

damit Verschiebung der Interferenzen $\overline{\Delta N} = \frac{1}{\lambda} 2 \frac{2\pi\omega r^2}{c}$ was gut meßbar ist.

technologische Anwendung: Gyrolaser (als Gyrometer, z.B. zur Stabilisierung von Flugzeugen)

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Ruhesystem, <i>n</i>	repère au repos, <i>m</i>
Zugende, <i>n</i>	queue de train, <i>f</i>
Zuganfang, <i>m</i>	tête de train, <i>f</i>
Zeitdilatation, <i>f</i>	dilatation temporelle, <i>f</i>
Längenkontraktion, <i>f</i>	contraction des longueurs, <i>f</i>
Elementarteilchen, <i>n</i>	particule élémentaire, <i>f</i>
Zerfall, <i>m</i>	désintégration, <i>f</i>
Vierervektor, <i>m</i>	quadrivecteur, <i>m</i>
Tensor, <i>m</i>	tenseur, <i>m</i>
Zeitraum, <i>m</i> (Raumzeit, <i>f</i>)	temps-espace, <i>m</i> (espace-temps, <i>m</i>)
Viererort, <i>m</i>	quadri-position, <i>f</i>
Vierergeschwindigkeit, <i>f</i>	quadri-velocity, <i>f</i>
Viererimpuls, <i>m</i>	quadri-impulsion, <i>f</i>
Viererbeschleunigung, <i>f</i>	quadri-accélération, <i>f</i>
Praktikumsversuch, <i>m</i>	expérience des travaux pratiques, <i>f</i>
Rapidität, <i>f</i>	rapidité, <i>f</i>
Komponente, <i>f</i>	composante, <i>f</i>
Lichtkegel, <i>m</i>	cône lumière, <i>m</i>

le genre grammatical des substantifs (*m,f*) est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

Vorlesung IV

2.4 Elektromagnetismus

Ziel: *relativistisch kovariante Formulierung der Maxwellgleichungen*

Wiederholung/Rappel: die Maxwellgleichungen beschreiben sowohl das elektrische Feld \mathbf{E} als auch das magnetische Feld \mathbf{B} : S.I. Einheiten

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \text{Gaußsches Gesetz}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \text{Abwesenheit magnetischer Monopole}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad \text{Induktionsgesetz (Minuszeichen paßt zur Lenzschen Regel)}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad , \quad \text{Durchflutungsgesetz, inkl. Verschiebungsstrom}$$

mit den Quellen: ρ : Ladungsdichte; \mathbf{j} : Stromdichte.

Notation: in Deutschland schreibt man $\text{rot } \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \wedge \mathbf{E}$, und $\text{div } \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B}$

der Verschiebungsstrom wurde von Maxwell aus Symmetriegründen postuliert, essentiell für elektromagnetische Wellen (Radio !) HERTZ, MARCONI, TESLA

N.B.: ohne Verschiebungsstrom sind die Maxwellgleichungen **Galilei-invariant**
kann Galilei Radio hören ?

LÉVY-LEBLOND 1967
 $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$

in Verallgemeinerung des Vektorpotentials $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ führt man ein:
das **Viererpotential** A : $A^\mu = (\phi, A_x, A_y, A_z)$

wir erwarten, daß A kovariant transformiert $A^\mu \xrightarrow{?} A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu$ vgl. später

N.B.: man hat $A_\mu = (-\phi, A_x, A_y, A_z) = (-\phi, \mathbf{A})$.

damit werden die elektrischen und magnetischen Felder Gauß-Einheiten !

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$$

Definition: Der **Feldstärkentensor** $F^{\mu\nu}$ ist gegeben durch

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} = -F^{\nu\mu}$$

analog kann man auch schreiben (Ersetzung $\mathbf{E} \mapsto -\mathbf{E}$, $\mathbf{B} \mapsto \mathbf{B}$)

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} = -F_{\nu\mu}$$

Definition: Der duale Feldstärkentensor $\tilde{F}^{\mu\nu}$ ist gegeben durch

$$\tilde{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix} = -\tilde{F}^{\nu\mu}$$

mit

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ gerade Permutation von } (0123) \\ -1 & \text{falls } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ ungerade Permutation von } (0123) \\ 0 & \text{sont} \end{cases}$$

man findet oft the Notation $*F$ anstelle von \tilde{F}

man erhält \tilde{F} aus F durch $\mathbf{E} \mapsto \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \mapsto -\mathbf{E}$

Definition: Der Viererstrom j ist gegeben durch $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$.

die Maxwellgleichungen schreiben sich relativistisch

Gauß-Einheiten, $c = 1$

$$\begin{array}{ll} \text{homogen} & \text{inhomogen} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & , \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \\ \nabla \wedge \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = \mathbf{0} & , \quad \nabla \wedge \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{j} \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 & , \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu \end{array}$$

die Verifizierung erfolgt in zwei Schritten:

1. Identität mit Maxwellgleichungen; 2. relativistische Kovarianz

ad 1.: man parametrisiere $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla \phi$, $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$. Damit

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{E} &= -\partial_t \nabla \wedge \mathbf{A} - \nabla \wedge (\nabla \phi) = -\partial_t \mathbf{B} \end{aligned}$$

Anschließend, wobei man die sogenannte **Lorentzgleichung** fordert: $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_t \phi = 0$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\partial_t (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \cdot \nabla \phi = (\partial_t^2 - \nabla^2) \phi =: \square \phi = \rho$$

wobei zusätzlich gefordert wird $\square \phi = \rho$.

\square : d'Alembertoperator

Schließlich

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \mathbf{B} &= \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) \\ &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A} \\ &= \nabla (-\partial_t \phi) - \nabla^2 \mathbf{A} \\ &= \partial_t (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \\ &= \partial_t \mathbf{E} + (\partial_t^2 - \nabla^2) \mathbf{A} \\ &= \partial_t \mathbf{E} + \mathbf{j}\end{aligned}$$

Identität der Vektoranalysis

Lorentzgleichung

Parametrisierung von \mathbf{E}

wobei zusätzlich gefordert wird $\square \mathbf{A} = \mathbf{j}$.

Die gewählte Parametrisierung ergibt also die Maxwellgleichungen, falls gilt:

$\square \phi = \rho$ und $\square \mathbf{A} = \mathbf{j}$ und außerdem die Lorentzgleichung $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_t \phi = 0$.

Eichtransformation: $\phi \mapsto \phi - \partial_t \Lambda$ und $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla \Lambda$ mit $\Lambda = \Lambda(t, \mathbf{r}) \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &\mapsto \nabla \wedge (\mathbf{A} + \nabla \Lambda) = \nabla \wedge \mathbf{A} + \overbrace{\nabla \wedge (\nabla \Lambda)}^{=0} = \nabla \wedge \mathbf{A} = \mathbf{B} \\ \mathbf{E} &\mapsto -(\partial_t \mathbf{A} + \partial_t \nabla \Lambda) - (\nabla \phi - \nabla \partial_t \Lambda) = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla \phi = \mathbf{E}\end{aligned}$$

☞ die physikalischen Observablen \mathbf{E} , \mathbf{B} sind eichinvariant.

betrachte nun die folgende Eichtransformation

$$\partial_t \phi + \nabla \cdot \mathbf{A} \mapsto \partial_t (\phi - \partial_t \Lambda) + \nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla \Lambda) = \underbrace{\partial_t \phi + \nabla \cdot \mathbf{A}}_{\text{soll verschwinden}} - (\partial_t^2 - \nabla^2) \Lambda$$

man kann damit Λ so wählen, daß $\partial_t \phi + \nabla \cdot \mathbf{A} \stackrel{!}{=} 0$. Λ ist damit bis auf Lösungen von $\square \Lambda = 0$ eindeutig bestimmt. Die verbleibende Freiheit kann z.B. für die Gültigkeit von Randbedingungen verwendet werden.

Die Lorentzeichung kann immer als erfüllt angesehen werden.

Die gewählte Parametrisierung für \mathbf{E} , \mathbf{B} ergibt also die Maxwellgleichungen, falls gilt: $\square \phi = \rho$ und $\square \mathbf{A} = \mathbf{j}$.

kovariante Schreibweise: $\square \mathbf{A} = \mathbf{j}$ oder $\square A^\mu = j^\mu$

die Stromerhaltung wird wie folgt formuliert

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu (\square A^\mu) = \square \underbrace{(\partial_\mu A^\mu)}_{=0} = 0$$

da $\partial_\mu = (-\partial_0, \nabla)$ heißt Stromerhaltung $0 = \partial_\mu j^\mu = -\partial_0 j^0 + \nabla \cdot \mathbf{j} \Rightarrow \partial_t \rho = \nabla \cdot \mathbf{j}$ Kontinuitätsgleichung

☞ *die Lorentzeichung garantiert also die Stromerhaltung.*

nach all diesen Vorbereitungen kommen wir endlich zur **kovarianten Schreibweise der Maxwellgleichungen** zurück:

* zunächst die inhomogenen Gleichungen:

$$\begin{aligned}\partial_\nu F^{\mu\nu} &= \partial_\nu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= \underbrace{\partial^\mu (\partial_\nu A^\nu)}_{=0} - \underbrace{\partial_\nu \partial^\nu A^\mu}_{=-\square} \\ &= \square A^\mu = j^\mu\end{aligned}$$

* danach die homogenen Gleichungen:

$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ ist total antisymmetrisch in den Indizes μ, ν, ρ, σ

$$\begin{aligned}\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) \\ &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho}_{=0} A_\sigma - \underbrace{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\sigma}_{=0} A_\rho \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

* man kann die homogenen Gleichungen auch direkt nachprüfen:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\rho\sigma} \stackrel{!}{=} 0$$

hier müssen die Indizes μ, ν, ρ, σ alle verschieden sein

$$\text{Rappel: } F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nu = 0 : \partial_1 F_{23} + \partial_3 F_{12} + \partial_2 F_{31} = \partial_x B_x + \partial_z B_z + \partial_y B_y = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nu = 1 : \partial_0 F_{23} + \partial_3 F_{02} + \partial_2 F_{30} = \partial_t B_x + \partial_z(-E_y) + \partial_y E_z = 0$$

$$\nu = 2 : \partial_0 F_{13} + \partial_3 F_{01} + \partial_1 F_{30} = \partial_t(-B_y) + \partial_z(-E_x) + \partial_x E_z = 0$$

$$\nu = 3 : \partial_0 F_{12} + \partial_2 F_{01} + \partial_1 F_{20} = \partial_t B_z + \partial_2(-E_x) + \partial_1 E_y = 0$$

$$\Rightarrow \nu = 0: \nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \nu = 1, 2, 3: \nabla \wedge \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$$

* und analog geht das auch für die inhomogenen Gleichungen:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \square A^\mu \stackrel{!}{=} j^\mu$$

$$\text{Rappel: } F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu = 0 : \partial_1 E_x + \partial_2 E_y + \partial_3 E_z = \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$$

$$\mu = 1 : \partial_0(-E_x) + \partial_2 B_z + \partial_3(-B_y) = j_x$$

$$\mu = 2 : \partial_0(-E_y) + \partial_1(-B_x) + \partial_3 B_x = j_y$$

$$\mu = 3 : \partial_0(-E_z) + \partial_1 B_y + \partial_2(-B_x) = j_z$$

$$\Rightarrow \nu = 0: \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho; \nu = 1, 2, 3: \nabla \wedge \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{j}$$

ad 2.: müssen zeigen: Lorentz-Kovarianz von $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$
(α) ∂^μ sind Komponenten eines Vierervektors

Beweis: aus der Lorentztransformation $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ hat man die Inverse
 $x^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu x'^\mu \Rightarrow$ für kovariante Indizes $x_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu x'_\mu$

betrachte nun den Gradienten des Skalars φ : $\frac{\partial\varphi}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu} \Lambda^\mu{}_\nu$. Damit

$$\partial'^\mu = \frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu$$

und das ist die behauptete Transformationseigenschaft.

QED

(β) Da $\square A = j$, sind die A^μ die Komponenten eines Vierervektors

Beweis: 1. Schritt: Sei j^μ ein Vierervektor. Dann

$$\square A'^\mu = j'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu \square A^\nu = \square (\Lambda^\mu{}_\nu A^\nu)$$

Diese Beziehung kann man im Energie-Impulsraum invertieren, da dort
 \square ein diagonaler Operator wird, denn \square ist Lorentzskalar.

Damit ist die Fouriertransformierte von A^μ (im Energie-Impuls-Raum) ein
Vierervektor. Rücktransformation gibt die Behauptung, daß A^μ Vierervektor.

2. Schritt: wir müssen zeigen, daß j^μ Vierervektor ist.

Man betrachte zunächst ein geladenes Teilchen, das sich auf einer Bahn $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(t) \in \mathbb{R}^3$ bewegt. Sei $z = (z^0, \mathfrak{z})$. Die Ladungsdichte ist

$$\rho(t, \mathbf{x}) = 4\pi e \delta(\mathbf{x} - \mathfrak{z}(t)) = 4\pi e \int dz^0 \delta(x^0 - z^0) \delta(\mathbf{x} - \mathfrak{z}(t)) = 4\pi e \int d\tau \frac{dz^0}{d\tau} \delta^{(4)}(\mathbf{x} - z)$$

und der Dreiervektor der Stromdichte

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) &= 4\pi e \frac{d\mathfrak{z}(t)}{dt} \delta(\mathbf{x} - \mathfrak{z}(t)) = 4\pi e \int dz^0 \frac{d\mathfrak{z}(t)}{dz^0} \delta(x^0 - z^0) \delta(\mathbf{x} - \mathfrak{z}(t)) \\ &= 4\pi e \int d\tau \frac{d\mathfrak{z}(\tau)}{d\tau} \delta^{(4)}(\mathbf{x} - z) \end{aligned}$$

so daß die Bahn durch die Eigenzeit τ parametrisiert ist. Dies sind die Zeit- und die Raumkomponenten eines Vierervektors

$$j^\mu(\mathbf{x}) = 4\pi e \int d\tau u^\mu(\tau) \delta^{(4)}(\mathbf{x} - z)$$

wobei $u = \frac{dx}{d\tau}$ die Vierergeschwindigkeit ist. Alle anderen Größen in j^μ sind lorentzinvariant. Für Ladungsverteilungen summiere man über die einzelnen Ladungen und ihre Bahnen, die stets durch die Eigenzeit τ kovariant parametrisiert werden. QED

Lorentztransformation von E und B

Die Gleichungen $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ und $\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ sind automatisch kovariant.

$F^{\mu\nu}$ ist ein Tensor, also hat man die Lorentztransformation

$$\text{falls } x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \text{ dann } F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}$$

Illustration: nehme Lorentztransformation in x -Richtung

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & & \\ \gamma v & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$$

zum Beispiel für das elektrische Feld

$$\text{Rappel } F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} E'_x &= F'^{01} = \Lambda^0_\rho \Lambda^1_\sigma F^{\rho\sigma} \\ &= \Lambda^0_0 \Lambda^1_\sigma F^{0\sigma} + \Lambda^0_1 \Lambda^1_\sigma F^{1\sigma} \\ &= \Lambda^0_0 \Lambda^1_0 \underbrace{F^{00}}_{=0} + \Lambda^0_0 \Lambda^1_1 F^{01} + \Lambda^0_1 \Lambda^1_0 F^{10} + \Lambda^0_1 \Lambda^1_1 \underbrace{F^{11}}_{=0} \\ &= \gamma^2 E_x + \gamma^2 v^2 (-E_x) \\ &= (1 - v^2)^{-1} (1 - v^2) E_x = E_x \end{aligned}$$

oder

$$\text{Rappels: } \Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & & \\ \gamma v & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} E'_y &= F'^{02} = \Lambda_{\rho}^0 \Lambda_{\sigma}^2 F^{\rho\sigma} \\ &= \Lambda_0^0 \Lambda_{\sigma}^2 F^{0\sigma} + \Lambda_1^0 \Lambda_{\sigma}^2 F^{1\sigma} \\ &= \Lambda_0^0 \Lambda_2^2 F^{02} + \Lambda_1^0 \Lambda_2^2 F^{12} \\ &= \gamma E_y + \gamma v B_z \end{aligned}$$

damit haben wir $E'_x = E_x$ und $E'_y = \gamma(E_y + vB_z)$ (und $E'_z = \gamma(E_z - vB_y)$)

☞ *Elektrisches Feld \mathbf{E} und magnetisches Feld \mathbf{B} transformieren nicht als Vektoren, sondern als Komponenten des Feldtensors $F^{\mu\nu}$.*

diese Transformationen lassen sich allgemeiner formulieren:
 eine Lorentztransformation mit Relativgeschwindigkeit in Richtung $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_{\parallel}$
 ☞ das definiert die Richtung \parallel ; alle anderen Richtung sind \perp

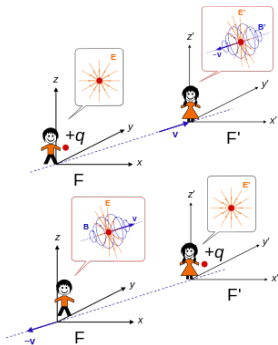
falls im Ruhesystem F das elektrische Feld \mathbf{E} und das magnetische Feld \mathbf{B} ,
 dann hat man im lorentz-transformierten Inertialsystem F' die Felder

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}$$

$$B'_{\parallel} = B_{\parallel}$$

$$E'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_{\perp})$$

$$B'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{v} \wedge \mathbf{E}_{\perp})$$



das sind die **Joules-Bernoulli-Transformationen**.

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Verschiebungsstrom, <i>m</i>	courant de déplacement, <i>m</i>
Eichtransformation, <i>f</i>	transformation de jauge, <i>f</i>
Lorentzzeichnung, <i>f</i>	jauge de Lorentz, <i>f</i>
Eichinvarianz, <i>f</i>	invariance de jauge, <i>f</i>
eichinvariant	invariant de jauge
Kontinuitätsgleichung, <i>f</i>	équation de continuité, <i>f</i>

le genre grammatical des substantifs (*m,f*) est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

3. Geometrie gekrümmter Räume

3.1 Metrik gekrümmter Räume

Ziel: Formulierung einer Geometrie als Verallgemeinerung der Geometrie euklidischer Räume

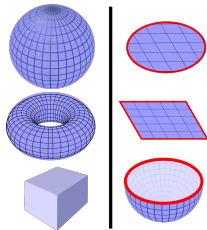
einen gekrümmten Raum kann man sich *grosso modo* als 'Oberfläche' vorstellen

mathematisch sagt man **Mannigfaltigkeit**

diese gibt es ohne Rand und mit Rand

Krümmung ist intrinsische Eigenschaft

(d.h. unabhängig von Einbettung in euklidischen Raum)




Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Mannigfaltigkeit_mit_Rand

eingebettet in einen 3D euklidischen Raum, könnte man eine 2D Oberfläche definieren durch

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = g(x, y)$$

Beispiel: Sphäre S^2 , mit Radius R : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

 eine solche Formulierung hängt zu sehr von den Details der Einbettung ab

wir suchen eine Formulierung der Art

$$x = x(\sigma^1, \sigma^2) \quad , \quad y = y(\sigma^1, \sigma^2) \quad , \quad z = z(\sigma^1, \sigma^2)$$

so daß die **intrinsischen Koordinaten** σ^1, σ^2 die wesentlichen Informationen enthalten

Definition: Die Zahl d der unabhängigen intrinsischen Koordinaten ist die **Dimension** des gekrümmten Raumes.

Beispiel: die Sphäre S^2

* man kann z.B. Kugelkoordinaten verwenden

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

mit $0 \leq \theta < 2\pi$ und $0 \leq \phi \leq \pi$

unübliche Notation !

* es geht aber auch $r = \rho \phi$

Bogenlänge

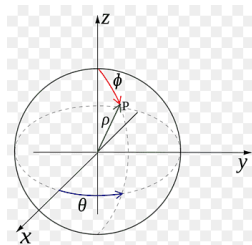
$$x = \rho \sin \frac{r}{\rho} \cos \theta, \quad y = \rho \sin \frac{r}{\rho} \sin \theta, \quad z = \rho \cos \frac{r}{\rho}$$

mit $0 \leq \theta < 2\pi$ und $0 \leq r \leq \pi \rho$

* oder auch Zylinderkoordinaten

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \sin \phi = \rho \sin \frac{r}{\rho}$$

$$x = \varrho \cos \theta, \quad y = \varrho \sin \theta, \quad z = \pm \sqrt{\rho^2 - \varrho^2}$$

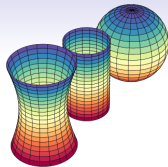


<https://www.pngegg.com/de/png-mvwmi>

(ϕ, θ) , (r, ϕ) , (ϱ, θ) sind Beispiele intrinsischer Koordinaten \Rightarrow $\dim S^2 = 2$

? Wie kann man Eigenschaften gekrümmter Räume finden, die unabhängig von der Wahl der Koordinaten sind ?

Bildquelle: <https://studywizards.com/curvy-pizza-math/>



oft betrachtet man den **Tangentialraum** $T_P M$ einer Mannigfaltigkeit M am Punkt P

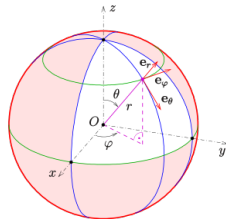


$T_P M$ wird als tangentielle Ebene dargestellt

$$\mathbf{r} = R \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + R \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + R \cos \theta \mathbf{e}_z$$

$\mathbf{e}_{x,y,z}$: kartesische Einheitsvektoren

üblichere Notation



Bildquelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten>

definiere Basisvektoren im Tangentialraum $T_P S^2$

$$\mathbf{e}_r := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial R} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\theta := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = R \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + R \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y - R \sin \theta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\varphi := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -R \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_x + R \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_y$$

für kartesische Basisvektoren im \mathbb{R}^3 gilt $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ mit $i, j = x, y, z$.

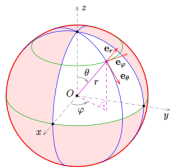
Für $T_P S^2$ hat man

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = 1, \quad \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = R^2, \quad \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi = R^2 \sin^2 \theta$$

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \text{ falls } i \neq j \text{ und } i, j = r, \theta, \varphi$$

damit hat man die Richtungen

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial}{\partial R} \text{ radial} \quad , \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} \text{ Südrichtung} \quad , \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{ Ostrichtung}$$



Definition: Ein **Vektorfeld** ist eine Gesamtheit von Tangentialvektoren an jedem Punkt $p \in M$: $V = V^i(p)\partial_i$

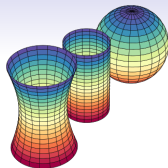
Definition: Die Elemente g_{ab} des **metrischen Tensors** sind in einer gegebenen Basis $g_{ab} := \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b$.

Vorlesung V

Rappel: Grundbegriffe zur Geometrie gekrümmter Räume

Ziel: Verallgemeinerung der Geometrie euklidischer Räume

? wie unterscheidet man gekrümmte Räume ?



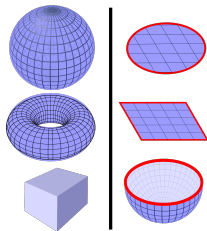
einen gekrümmten Raum kann man sich *grosso modo* als 'Oberfläche' vorstellen

mathematisch sagt man **Mannigfaltigkeit**

diese gibt es ohne Rand und mit Rand

Krümmung ist **intrinsische** Eigenschaft

(d.h. unabhängig von Einbettung in euklidischen Raum)



Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Mannigfaltigkeit_mit_Rand

eingebettet in einen 3D euklidischen Raum, könnte man eine 2D Oberfläche definieren durch

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = g(x, y)$$

Beispiel: Sphäre S^2 , mit Radius R : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

⚠ eine solche Formulierung hängt zu sehr von den Details der Einbettung ab

wir suchen eine Formulierung der Art

$$x = x(\sigma^1, \sigma^2) \quad , \quad y = y(\sigma^1, \sigma^2) \quad , \quad z = z(\sigma^1, \sigma^2)$$

so daß die **intrinsischen Koordinaten** σ^1, σ^2 die wesentlichen Informationen enthalten

Definition: Die Zahl d der unabhängigen intrinsischen Koordinaten ist die **Dimension** des gekrümmten Raumes.

Beispiel: die Sphäre S^2

* man kann z.B. Kugelkoordinaten verwenden

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

mit $0 \leq \theta < 2\pi$ und $0 \leq \phi \leq \pi$

unübliche Notation !

* es geht aber auch $r = \rho \phi$

Bogenlänge

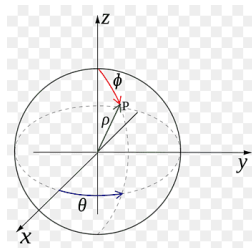
$$x = \rho \sin \frac{r}{\rho} \cos \theta, \quad y = \rho \sin \frac{r}{\rho} \sin \theta, \quad z = \rho \cos \frac{r}{\rho}$$

mit $0 \leq \theta < 2\pi$ und $0 \leq r \leq \pi \rho$

* oder auch Zylinderkoordinaten

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \sin \phi = \rho \sin \frac{r}{\rho}$$

$$x = \varrho \cos \theta, \quad y = \varrho \sin \theta, \quad z = \pm \sqrt{\rho^2 - \varrho^2}$$

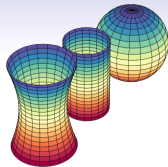


<https://www.pngegg.com/de/png-mvwmi>

(ϕ, θ) , (r, ϕ) , (ϱ, θ) sind Beispiele intrinsischer Koordinaten \Rightarrow $\dim S^2 = 2$

? Wie kann man Eigenschaften gekrümmter Räume finden, die unabhängig von der Wahl der Koordinaten sind ?

Bildquelle: <https://studywizards.com/curvy-pizza-math/>



oft betrachtet man den **Tangentialraum** $T_P M$ einer Mannigfaltigkeit M am Punkt P

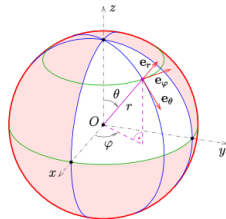


$T_P M$ wird als tangentielle Ebene dargestellt

$$\mathbf{r} = R \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + R \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + R \cos \theta \mathbf{e}_z$$

$\mathbf{e}_{x,y,z}$: kartesische Einheitsvektoren

üblichere Notation



Bildquelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten>

definiere Basisvektoren im Tangentialraum $T_P S^2$

$$\mathbf{e}_r := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial R} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\theta := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = R \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + R \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y - R \sin \theta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\varphi := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -R \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_x + R \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_y$$

für kartesische Basisvektoren im \mathbb{R}^3 gilt $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ mit $i, j = x, y, z$.

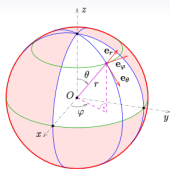
Für $T_p S^2$ hat man

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = 1, \quad \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = R^2, \quad \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi = R^2 \sin^2 \theta$$

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \text{ falls } i \neq j \text{ und } i, j = r, \theta, \varphi$$

damit hat man die Richtungen

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial}{\partial R} \text{ radial} \quad , \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} \text{ Südrichtung} \quad , \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{ Ostrichtung}$$



Definition: Ein **Vektorfeld** ist eine Gesamtheit von Tangentialvektoren an jedem Punkt $p \in M$: $V = V^i(p)\partial_i$

Definition: Die Elemente g_{ab} des **metrischen Tensors** sind in einer gegebenen Basis $g_{ab} := \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b$.

mit g kann man infinitesimale Längen beschreiben

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ab} dx^a dx^b \\ &= g_{11} (dx^1)^2 + g_{22} (dx^2)^2 + 2g_{12} dx^1 dx^2 \\ &= \begin{pmatrix} dx^1 & dx^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

im Allgemeinen kann man eine beliebige Matrix g_{ab} in **symmetrische** und **antisymmetrische** Teile zerlegen

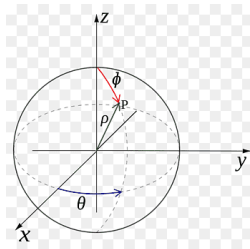
$$g_{ab} = g_{(ab)} + g_{[ab]} := \frac{1}{2}(g_{ab} + g_{ba}) + \frac{1}{2}(g_{ab} - g_{ba})$$

und da $g_{[ab]}dx^a dx^b = 0$, ist der metrische Tensor $g_{ab} = g_{ba}$ symmetrisch.

Beispiel: Kugeloberfläche S^2 , Radius ρ ! unübliche Notation !

* verwende die Koordinaten mit Bogenlänge $r = \rho\phi$

$$x = \rho \sin \frac{r}{\rho} \cos \theta, \quad y = \rho \sin \frac{r}{\rho} \sin \theta, \quad z = \rho \cos \frac{r}{\rho}$$



Abstand in geographischer Breite $ds_r = dr$

Abstand in geographischer Länge $ds_\theta = \rho \sin \phi d\theta = \rho \sin \frac{r}{\rho} d\theta$

Entfernung insgesamt auf der Kugeloberfläche & metrischer Tensor g

$$ds^2 = ds_r^2 + ds_\theta^2 = dr^2 + \rho^2 \sin^2 \frac{r}{\rho} d\theta^2, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \sin^2 \frac{r}{\rho} \end{pmatrix}$$

* in Polarkoordinaten hat man $\varrho = \rho \sin \frac{r}{\rho} \Rightarrow d\varrho = \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{\rho^2}} dr$

$$ds^2 = \frac{\rho^2 d\varrho^2}{\sqrt{\rho^2 - \varrho^2}} + \varrho^2 d\theta^2, \quad g = \begin{pmatrix} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 - \varrho^2}} & 0 \\ 0 & \varrho^2 \end{pmatrix}$$

die Elemente g_{ab} erhält man aus Messung der intrinsische Abstände

$$g_{11} = \frac{(ds_1)^2}{(dx^1)^2}, \quad g_{22} = \frac{(ds_2)^2}{(dx^2)^2}, \quad g_{12} = \frac{(ds_{12})^2 - (ds_1)^2 - (ds_2)^2}{2dx^1 dx^2}$$

ds^1, ds^2 entlang von x^1, x^2 gemessen. Ferner: g_{12} hängt mit dem Richtungskosinus zwischen x^1 und x^2 zusammen.

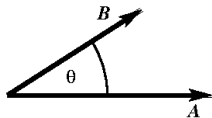
☞ *Für orthogonale Koordinaten ist g_{ab} stets diagonal.*

3.2 Geodätische Kurven

alle geometrischen Größen können mit Kenntnis des metrischen Tensors g_{ab} berechnet werden.

(A) Winkel zwischen zwei Vektoren \mathbf{A} , \mathbf{B}

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} = \frac{g_{ab} A^a B^b}{\sqrt{g_{cd} A^c A^d} \sqrt{g_{ef} B^e B^f}}$$



für euklidische Metrik $g_{ab} = \delta_{ab}$ wird bekanntes Ergebnis reproduziert

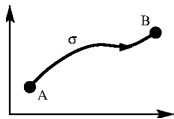
(B) die **geodätische Kurve**,

d.h. *die kürzeste Kurve zwischen 2 festen Punkten A, B*

gehe aus von $ds = \sqrt{g_{ab} dx^a dx^b}$

die Kurve $x^a = x^a(\sigma)$ wird durch σ parametrisiert

σ kann z.B. die Bogenlänge sein



gesamte Länge einer Kurve von A nach B

$$s = \int_A^B ds = \int_{\sigma_A}^{\sigma_B} d\sigma \frac{ds}{d\sigma} = \int_{\sigma_A}^{\sigma_B} d\sigma \sqrt{\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2} \stackrel{!}{=} \min$$

⇒ typisches Problem der **Variationsrechnung**. Mit der Lagrangefunktion

$$L = \sqrt{g_{ab} \frac{dx^a}{d\sigma} \frac{dx^b}{d\sigma}}$$

hat man für die Länge $s = \int_{\sigma_A}^{\sigma_B} d\sigma L \stackrel{!}{=} \min$.

Die Lösung $x^a = x^a(\sigma)$ erhält man dann aus den **Euler-Lagrange Gleichungen**

$$\boxed{\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^a} = 0} \quad , \quad \text{mit } \dot{x}^a = \frac{dx^a}{d\sigma}$$

N.B.: rechentechnisch ist es einfacher, zu minimieren $\tilde{s} = \int_{\sigma_A}^{\sigma_B} d\sigma L^2$.

Wir nehmen hier als Lagrangefunktion

$$L = g_{ab} \frac{dx^a}{d\sigma} \frac{dx^b}{d\sigma}$$

Notation: man schreibt zur Abkürzung $\boxed{A_{,\mu} := \frac{\partial A}{\partial x^\mu}}$.

um die Gleichung $x^a = x^a(\sigma)$ einer geodätischen Kurve zu finden, löse

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^a} = 0 \quad \text{mit Lagrangefunktion} \quad L = g_{ab} \frac{dx^a}{d\sigma} \frac{dx^b}{d\sigma} = g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b$$

man hat

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = g_{\kappa\lambda,\mu} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = 2g_{\mu\kappa} \dot{x}^\kappa$$

so daß die Euler-Lagrange Gleichungen lauten

$$2g_{\mu\kappa} \ddot{x}^\kappa + 2g_{\mu\kappa,\lambda} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda - g_{\kappa\lambda,\mu} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda = 0$$

um die Gleichung $x^a = x^a(\sigma)$ einer geodätischen Kurve zu finden, löse

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^a} = 0 \quad \text{mit Lagrangefunktion} \quad L = g_{ab} \frac{dx^a}{d\sigma} \frac{dx^b}{d\sigma} = g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b$$

man hat

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = g_{\kappa\lambda,\mu} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = 2g_{\mu\kappa} \dot{x}^\kappa$$

so daß die Euler-Lagrange Gleichungen lauten

$$2g_{\mu\kappa} \ddot{x}^\kappa + 2g_{\mu\kappa,\lambda} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda - g_{\kappa\lambda,\mu} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda = 0$$

um die Gleichung $x^a = x^a(\sigma)$ einer geodätischen Kurve zu finden, löse

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^a} = 0 \quad \text{mit Lagrangefunktion} \quad L = g_{ab} \frac{dx^a}{d\sigma} \frac{dx^b}{d\sigma} = g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b$$

man hat

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = g_{\kappa\lambda,\mu} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = 2g_{\mu\kappa} \dot{x}^\kappa$$

so daß die Euler-Lagrange Gleichungen lauten

Symmetrisierung

$$2g_{\mu\kappa} \ddot{x}^\kappa + 2 \frac{1}{2} (g_{\mu\kappa,\lambda} + g_{\mu\lambda,\kappa}) \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda - g_{\kappa\lambda,\mu} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda = 0$$

um die Gleichung $x^a = x^a(\sigma)$ einer geodätischen Kurve zu finden, löse

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^a} = 0 \quad \text{mit Lagrangefunktion} \quad L = g_{ab} \frac{dx^a}{d\sigma} \frac{dx^b}{d\sigma} = g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b$$

man hat

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = g_{\kappa\lambda,\mu} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = 2g_{\mu\kappa} \dot{x}^\kappa$$

so daß die Euler-Lagrange Gleichungen lauten

Symmetrisierung

$$2g_{\mu\kappa} \ddot{x}^\kappa + (g_{\mu\kappa,\lambda} + g_{\mu\lambda,\kappa}) \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda - g_{\kappa\lambda,\mu} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda = 0$$

um die Gleichung $x^a = x^a(\sigma)$ einer geodätischen Kurve zu finden, löse

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^a} = 0 \quad \text{mit Lagrangefunktion} \quad L = g_{ab} \frac{dx^a}{d\sigma} \frac{dx^b}{d\sigma} = g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b$$

man hat

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = g_{\kappa\lambda,\mu} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = 2g_{\mu\kappa} \dot{x}^\kappa$$

so daß die Euler-Lagrange Gleichungen lauten

$$2g_{\mu\kappa} \ddot{x}^\kappa + (g_{\mu\kappa,\lambda} + g_{\mu\lambda,\kappa} - g_{\kappa\lambda,\mu}) \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda = 0$$

falls der metrische Tensor eine Inverse hat, d.h. $g = \det g_{\mu\nu} \neq 0$, dann $g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda$

$$\Rightarrow g^{\rho\mu} g_{\mu\kappa} \ddot{x}^\kappa = \ddot{x}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\mu} (g_{\mu\kappa,\lambda} + g_{\mu\lambda,\kappa} - g_{\kappa\lambda,\mu}) \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda$$

☞ Die geodätische Gleichung lautet

$$\ddot{x}^\rho + \Gamma_{\kappa\lambda}^\rho \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda = 0 \quad , \quad \Gamma_{\kappa\lambda}^\rho := \frac{1}{2} g^{\rho\mu} (g_{\mu\kappa,\lambda} + g_{\mu\lambda,\kappa} - g_{\kappa\lambda,\mu})$$

Hierin sind die $\Gamma_{\kappa\lambda}^\rho$ die **Christoffel-Symbole**.

Beispiele zu den geodätischen Kurven I

Gleichung für geodätische Kurve

$$\ddot{x}^\rho + \Gamma_{\kappa\lambda}^\rho \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda = 0 \quad , \quad \Gamma_{\kappa\lambda}^\rho := \frac{1}{2} g^{\rho\mu} (g_{\mu\kappa,\lambda} + g_{\mu\lambda,\kappa} - g_{\kappa\lambda,\mu}) = \Gamma_{\lambda\kappa}^\rho$$

(A) euklidische Ebene \mathbb{R}^2 , **kartesische Koordinaten** $(x^1, x^2) = (x, y)$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad , \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma_{\kappa\lambda}^\rho = 0$$

nichtverschwindende Christoffelsymbole erhält man nur, wenn Elemente des metrischen Tensors von den Koordinaten abhängen

die geodätischen Gleichungen lauten $\frac{d^2x}{d\sigma^2} = \frac{d^2y}{d\sigma^2} = 0$, die geodätische Kurve (die **Geodäte**) ist also eine Gerade.

☞ Daher ist die Ebene \mathbb{R}^2 flach.

Das reproduziert lediglich, was mindestens seit Euklid bekannt ist.

Beispiele zu den geodätischen Kurven II

Gleichung für geodätische Kurve

$$\ddot{x}^\rho + \Gamma_{\kappa\lambda}^\rho \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda = 0 \quad , \quad \Gamma_{\kappa\lambda}^\rho := \frac{1}{2} g^{\rho\mu} (g_{\mu\kappa,\lambda} + g_{\mu\lambda,\kappa} - g_{\kappa\lambda,\mu}) = \Gamma_{\lambda\kappa}^\rho$$

(B) euklidische Ebene \mathbb{R}^2 , Polarkoordinaten $(x^1, x^2) = (r, \phi)$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad , \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad , \quad (g^{-1})_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}$$

der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ ist diagonal

$$\Gamma_{\kappa\lambda}^1 = \frac{1}{2} g^{1\mu} (g_{\mu\kappa,\lambda} + g_{\mu\lambda,\kappa} - g_{\kappa\lambda,\mu}) = \frac{1}{2} g^{11} \left(\underbrace{g_{1\kappa,\lambda} + g_{1\lambda,\kappa}}_{=0, \text{ da } g_{1\kappa} = \text{cste.}} - \underbrace{g_{\kappa\lambda,1}}_{\text{hängt von } r \text{ ab}} \right)$$

$$\Rightarrow \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial r} r^2 \right) = -r \quad \text{und } \Gamma_{\kappa\lambda}^1 = 0 \text{ für alle anderen } \kappa, \lambda$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\kappa\lambda}^2 &= \frac{1}{2} g^{2\mu} (g_{\mu\kappa,\lambda} + g_{\mu\lambda,\kappa} - g_{\kappa\lambda,\mu}) \\
 &= \frac{1}{2} g^{22} \left(\underbrace{g_{2\kappa,\lambda} + g_{2\lambda,\kappa}}_{\text{hängt von } r \text{ ab}} - \underbrace{g_{\kappa\lambda,2}}_{=0, \text{ unabhängig von } \phi} \right)
 \end{aligned}$$

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \cdot r^{-2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2) = \frac{1}{r} \quad \text{und } \Gamma_{\kappa\lambda}^2 = 0 \text{ für alle anderen } \kappa, \lambda$$

Für die euklidische Ebene \mathbb{R}^2 in Polarkoordinaten sind die nichtverschwindenden Christoffelsymbole $\Gamma_{22}^1 = -r$ und $\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}$.

Die Gleichungen für die Geodäte lauten

$$\ddot{x}^\rho + \Gamma_{\kappa\lambda}^\rho \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2 r}{d\sigma^2} - r \left(\frac{d\phi}{d\sigma} \right)^2 = 0 \quad , \quad \frac{d^2 \phi}{d\sigma^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{d\phi}{d\sigma} = 0}$$

Lösung der Gleichungen für die Geodäte in der Ebene \mathbb{R}^2 (Polarkoordinaten):

$$\frac{d^2 r}{d\sigma^2} - r \left(\frac{d\phi}{d\sigma} \right)^2 = 0 \quad , \quad \frac{d^2 \phi}{d\sigma^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{d\phi}{d\sigma} = 0$$

falls $\frac{d\phi}{d\sigma} = 0$, hat man $\frac{d^2 r}{d\sigma^2} = 0$ aus der 1. Gl. Das gibt eine Gerade durch den Ursprung.
sei daher $\frac{d\phi}{d\sigma} \neq 0$. Aus der 2. Gleichung folgt

$$\frac{1}{\dot{\phi}} \frac{d\dot{\phi}}{d\sigma} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln \dot{\phi} + \ln r^2 = \text{cste.}$$

und damit das erste Integral $r^2 \dot{\phi} = h = \text{cste.}$

Anstelle der 1. Gleichung arbeitet man besser mit der Metrik. Wähle $s = \sigma$ (Bogenlänge als Parameter). Dann, mit Hilfe des ersten Integrals

$$1 = \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{h}{r^2} \right)^2 = \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + \frac{h^2}{r^2}$$

die Gleichungen für die Geodäte lauten nun

$$\frac{dr}{ds} = \pm \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - h^2} \quad , \quad \frac{d\phi}{ds} = \frac{h}{r^2}$$

Wir wollen die geometrische Form der Geodäte, also die **Bahnkurve** $r = r(\phi)$. Einfacher: *finde die Bahn in der Form $\phi = \phi(r)$.*

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^{-1} = \frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{h}{r^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - h^2}} = \pm \frac{d}{dr} \left(\arccos \frac{h}{r} \right)$$

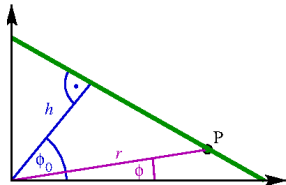
$\Rightarrow \phi - \phi_0 = \pm \arccos \frac{h}{r}$. Die Gleichung der Geodäte ist $\frac{h}{r} = \cos(\phi - \phi_0)$.

* aus der Skizze erkennt man, daß dies eine *Gerade* ist

h ist der Abstand der Geodäte vom Ursprung

* Form der Geodäte unabhängig von Koordinatenwahl

* $\Gamma_{\kappa\lambda}^{\rho} \neq 0$ impliziert **nicht**: Geodäte gekrümmt



N.B.: für $u = \frac{1}{r}$ gilt die DGL der Geraden in Polarkoordinaten: $\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 0$

Beispiele zu den geodätischen Kurven III

Gleichung für geodätische Kurve

$$\ddot{x}^\rho + \Gamma_{\kappa\lambda}^\rho \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda = 0 \quad , \quad \Gamma_{\kappa\lambda}^\rho := \frac{1}{2} g^{\rho\mu} (g_{\mu\kappa,\lambda} + g_{\mu\lambda,\kappa} - g_{\kappa\lambda,\mu}) = \Gamma_{\lambda\kappa}^\rho$$

(C) Kugeloberfläche S^2 , **Kugelkoordinaten** (x^1, x^2) = (θ, ϕ)

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad , \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad , \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} \frac{1}{\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ ist diagonal

$$\Gamma_{\kappa\lambda}^1 = \frac{1}{2} g^{1\mu} (g_{\mu\kappa,\lambda} + g_{\mu\lambda,\kappa} - g_{\kappa\lambda,\mu}) = \frac{1}{2} g^{11} \left(\underbrace{g_{1\kappa,\lambda} + g_{1\lambda,\kappa}}_{=0, \text{ da } g_{1\kappa} = \text{cste.}} - \underbrace{g_{\kappa\lambda,1}}_{\text{hängt von } \theta \text{ ab}} \right)$$

$$\Rightarrow \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial\theta} a^2 \sin^2\theta \right) = -\sin\theta \cos\theta, \quad \Gamma_{\kappa\lambda}^1 = 0 \text{ für alle anderen } \kappa, \lambda$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\kappa\lambda}^2 &= \frac{1}{2}g^{2\mu} (g_{\mu\kappa,\lambda} + g_{\mu\lambda,\kappa} - g_{\kappa\lambda,\mu}) \\ &= \frac{1}{2}g^{22} \left(\underbrace{g_{2\kappa,\lambda} + g_{2\lambda,\kappa}}_{\text{hängt von } \theta \text{ ab}} - \underbrace{g_{\kappa\lambda,2}}_{=0, \text{ unabhängig von } \phi} \right)\end{aligned}$$

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (a^2 \sin^2 \theta) = \cot \theta, \quad \Gamma_{\kappa\lambda}^2 = 0 \text{ für alle anderen } \kappa, \lambda$$

Für die Kugeloberfläche S^2 in Kugelkoordinaten sind die nicht-trivialen Christoffelsymbole $\Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta$ und $\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \cot \theta$.

Die Gleichungen für die Geodäte lauten

$$\ddot{x}^\rho + \Gamma_{\kappa\lambda}^\rho \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{d\sigma^2} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{d\sigma}\right)^2 = 0, \quad \frac{d^2\phi}{d\sigma^2} + 2 \cot \theta \frac{d\theta}{d\sigma} \frac{d\phi}{d\sigma} = 0}$$

Lösung der Gleichungen für die Geodäte auf der Sphäre S^2 (Kugelkoordinaten):

$$\frac{d^2\theta}{d\sigma^2} - \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\phi}{d\sigma}\right)^2 = 0 \quad , \quad \frac{d^2\phi}{d\sigma^2} + 2 \cot\theta \frac{d\theta}{d\sigma} \frac{d\phi}{d\sigma} = 0$$

falls $\frac{d\phi}{d\sigma} = 0$, hat man $\frac{d^2\theta}{d\sigma^2} = 0$ aus der 1. Gleichung.

sei daher $\frac{d\phi}{d\sigma} \neq 0$. Aus der 2. Gleichung folgt

$$\frac{1}{\dot{\phi}} \frac{d\dot{\phi}}{d\sigma} + 2 \cot\theta \frac{d\theta}{d\sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln \dot{\phi} + \ln \sin^2\theta = \text{cste.}$$

und damit das erste Integral $\sin^2\theta \dot{\phi} = h = \text{cste.}$

Anstelle der 1. Gleichung arbeitet man besser mit der Metrik. Wähle $s = \sigma$ (Bogenlänge als Parameter). Dann, mit Hilfe des ersten Integrals

$$1 = a^2 \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + a^2 \sin^2\theta \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = a^2 \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \frac{a^2 h^2}{\sin^2\theta}$$

die Gleichungen für die Geodäte lauten nun

$$\frac{d\theta}{ds} = \pm \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - a^2 h^2}}{a \sin \theta}, \quad \frac{d\phi}{ds} = \frac{h}{\sin^2 \theta}$$

Wir suchen geometrische Formen, also die Bahn in der Form $\phi = \phi(\theta)$

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \pm \frac{h}{\sin^2 \theta} \frac{a \sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta - a^2 h^2}} = \pm \frac{d}{d\theta} \left(\arccos \frac{h \cot \theta}{\sqrt{\frac{1}{a^2} - h^2}} \right)$$

(N.B.: Details zur Berechnung des Integrals auf der nächsten Seite)

Damit erhalten wir die Geodäte in der Form

$$\cos(\phi - \phi_0) - \frac{h}{\sqrt{\frac{1}{a^2} - h^2}} \cot \theta = 0$$

das kann man umschreiben: $A \cos \phi + B \sin \phi + C \cot \theta = 0$,

A, B, C : bekannte Konstanten

$$A \sin \theta \cos \phi + B \sin \theta \sin \phi + C \cos \theta = 0$$

Mathematische Anmerkung zu den Details der Integration:

wollen integrieren $\frac{d\phi}{d\theta} = \pm \frac{ah}{\sin^2 \theta} \frac{\sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta - a^2 h^2}}$ (es ist besser, $\sin \theta$ **nicht** zu kürzen)

$$\phi - \phi_0 = \pm ah \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2 h^2}{\sin^2 \theta}}}$$

notiere $\frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \cot^2 \theta$

$$= \pm ah \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} \left[1 - a^2 h^2 (1 + \cot^2 \theta) \right]^{-1/2}$$

notiere $\frac{d \cot \theta}{d\theta} = -\frac{1}{\sin^2 \theta}$

$$= \pm ah \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} \left[1 - a^2 h^2 - a^2 h^2 \cot^2 \theta \right]^{-1/2}$$

setze $u = \cot \theta$, $\Rightarrow du = -\frac{d\theta}{\sin^2 \theta}$

$$= \mp ah \int du \frac{1}{ah} \left[\frac{1 - a^2 h^2}{a^2 h^2} - u^2 \right]^{-1/2}$$

setze $u = \sqrt{\frac{1}{a^2 h^2} - 1} \cos \alpha \Rightarrow du = -\sqrt{\frac{1}{a^2 h^2} - 1} \sin \alpha d\alpha$

$$= \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{a^2 h^2} - 1}}{\sqrt{\frac{1}{a^2 h^2} - 1}} \int d\alpha \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = \pm \alpha$$

$$= \pm \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2 h^2} - 1}} \cot \theta \right) = \pm \arccos \left(\frac{h}{\sqrt{\frac{1}{a^2} - h^2}} \cot \theta \right)$$

wie behauptet.]

N.B.: Solche Gleichungen entstehen durch den Schnitt einer Kugel, mit Mittelpunkt im Ursprung, mit einer Ebene, die durch den Ursprung geht.

$$\text{Kugel: } x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad \text{Ebene durch Ursprung: } \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

Hessesche Normalform

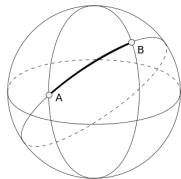
man drücke nun die Koordinaten x, y, z der Ebene durch Kugelkoordinaten (Radius a) aus.

* Die Geodäten auf der Kugeloberfläche S^2 sind also **Großkreise** (Orthodrome)

☞ S^2 ist gekrümmt, da Geodäten keine Geraden

* $\Gamma_{\kappa\lambda}^{\rho} \neq 0$ notwendig für Krümmung

* **Orthodromen** sind die Routen für Langstreckenflüge



<https://de.wikipedia.org/wiki/Orthodrome>



Physikalische Relevanz: beschreibt freien Fall von Teilchen in einem Raum mit gegebenem $g_{\mu\nu}$, also evtl. mit Gravitation

ein sehenswertes Vidéo dazu: <http://images.math.cnrs.fr/Pourquoi-des-plis-dans-les-vetements.html>

3.3 Lokal-euklidische Koordinaten

Theorem: In einem gekrümmten Raum, mit Koordinaten x^a und metrischem Tensor g_{ab} an einem Punkt P , gibt es eine Koordinatentransformation in P

$$x^a \mapsto \bar{x}^a = \bar{x}^a(\mathbf{x}) \quad , \quad g_{ab} \mapsto \bar{g}_{ab} = \bar{g}_{ab}(g(\mathbf{x}))$$

so daß, mit $\bar{\mathbf{x}}(P) = \mathbf{0}$ und Konstanten $\gamma_{abcd} = \gamma_{abcd}(P)$

$$\bar{g}_{ab} = \delta_{ab} + \gamma_{abcd} \bar{x}^c \bar{x}^d + \dots$$

Die wesentliche Aussage ist, daß man die linearen Terme in \bar{x}^a eliminieren kann; genau diese geben aber die Werte der Christoffelsymbole Γ_{bc}^a am Punkt P . Die nicht-trivialen Teile der Metrik enthalten die Koeffizienten γ_{abcd} , die die Krümmung beschreiben.

Illustration: für den zweidimensionalen Fall ($d = 2$):

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + g_{22}(dx^2)^2 \\ &= \left(\sqrt{g_{11}} dx^1 + \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} dx^2 \right)^2 + \left(\sqrt{g_{22} - \frac{g_{12}^2}{g_{11}}} dx^2 \right)^2 \\ &=: (d\bar{x}^1)^2 + (d\bar{x}^2)^2 \end{aligned}$$

man versteht also, wieso die Christoffelsymbole für die Krümmung nicht hinreichend sind

3.4 Gauß'sche Krümmung

Theorema egregium (GAUSS) *Für jede Oberfläche gibt genau eine Größe K , die gauß'sche Krümmung, konstruiert aus den ersten und zweiten Ableitungen des metrischen Tensors, so daß $K = 0$ genau dann, wenn die Oberfläche flach ist.*

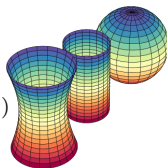
Falls g_{ab} diagonal ist, hat man

$$K = \frac{1}{2} \frac{1}{g_{11}g_{22}} \left\{ -\frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial x^2)^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial x^1)^2} + \frac{1}{2g_{11}} \left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2g_{22}} \left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right)^2 \right] \right\}$$

Es gibt drei Oberflächen mit K konstant

$$\chi = \frac{r}{R}$$

$$ds^2 = \begin{cases} R^2(d\chi^2 + \sin^2 \chi d\phi^2) & k = +1 & \text{Kugeloberfläche } S^2 \\ R^2(d\chi^2 + \chi^2 d\phi^2) & k = 0 & \text{Ebene } \mathbb{R}^2 \text{ (Zylinder } \mathbb{R} \times S^1) \\ R^2(d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\phi^2) & k = -1 & \text{Satteloberfläche } P^2 \end{cases}$$



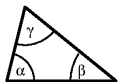
und man hat $K = \frac{1}{R^2} k$.

Bildquelle: <https://studywizards.com/curvy-pizza-math/>

N.B.: die Satteloberfläche (Pseudosphäre) $P^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch $z^2 - x^2 - y^2 = R^2$

In der euklidischen Geometrie ist der Kreisumfang $S = 2\pi r$ durch den Radius r gegeben. Im nichteuklidischen Fall hat man die **Krümmung**

$$K := \frac{3}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi r - S}{r^3}$$



Ferner gilt der euklidische Satz über die Winkelsumme im Dreieck $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Im nichteuklidischen Fall hat man den Winkelexzeß

$$\varepsilon := \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

Ist σ die Fläche eines Dreiecks (Polygons), so gilt

$$\varepsilon = K\sigma$$

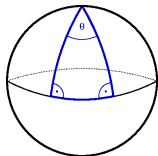


Illustration am Beispiel S^2 : das **blaue** sphärische **Dreieck** hat die Fläche $\sigma = 2\theta R^2 \frac{1}{2}$ und den Winkelexzeß θ .

$$\sigma = \theta R^2 \Rightarrow \varepsilon = \theta = \frac{\sigma}{R^2} =: \sigma K \Rightarrow K = \frac{1}{R^2}$$

K beschreibt **lokale** Eigenschaften einer Fläche (Mannigfaltigkeit).

Weiterer Aspekt der Gauß'schen Krümmung

Definition: Eine Abbildung $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten \mathcal{M}, \mathcal{N} heißt **Isometrie**, falls die Längen invariant sind $ds' = df(s) = ds$.

Man kann den Satz von Gauß auch so aussprechen:

Theorema egregium: Die Gauß'sche Krümmung K ist unter lokalen Isometrien invariant.

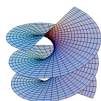
Folgerungen:

(a) die Ebene \mathbb{R}^2 und die Sphäre S^2 sind **nicht** lokal isometrisch, da $K_{\mathbb{R}^2} \neq K_{S^2}$.

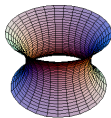
(b) man betrachte die folgenden zwei Oberflächen:

$$u, v \in \mathbb{R}, \phi \in [0, 2\pi)$$

Helikoid:
$$\begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \sin u \\ z = u \end{cases}$$



, Kathenoid:
$$\begin{cases} x = \cosh u \cos \phi \\ y = \cosh u \sin \phi \\ z = u \end{cases}$$



Diese Flächen haben lokal die gleiche Krümmung und sind lokal isometrisch.

3.5 Tensoren

betrachte beliebige Koordinatentransformationen $x^\mu \mapsto x'^\mu = x'^\mu(\mathbf{x})$
die infinitesimale Form ist

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = \Lambda_\nu^\mu(\mathbf{x}) dx^\nu$$

Rappel: diese Matrizen verallgemeinern die Lorentztransformationen,
z.B. $t' = \gamma(t - vx)$, $x' = \gamma(x - vt)$, $y' = y$, $z' = z$, daher

$$\Lambda_0^0 = \frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma, \quad \Lambda_1^0 = \frac{\partial t'}{\partial x} = -\gamma v, \quad \Lambda_0^1 = \frac{\partial x'}{\partial t} = -\gamma v, \quad \Lambda_1^1 = \frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma \text{ etc.}$$

Allgemeiner, ein kontravarianter Vektor \mathbf{V} transformiert sich nach $\mathbf{V} \mapsto \mathbf{V}'$, wobei

$$\begin{pmatrix} V'^0 \\ V'^1 \\ V'^2 \\ V'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & & \\ -\gamma v & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^0 \\ V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix}$$

Für einen **kontravarianten Vektor**: $V^\mu \mapsto V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu$

Für einen **kovarianten Vektor**: $V_\mu \mapsto V'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V_\nu$

Definition: Die Komponenten eines Tensors der Stufe $\binom{r}{s}$ transformieren wie:

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\lambda_1 \dots \lambda_s} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_r}}{\partial x^{\rho_r}} \cdot \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\lambda_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_s}}{\partial x'^{\lambda_s}} T^{\rho_1 \dots \rho_r}_{\sigma_1 \dots \sigma_s}$$

man unterscheidet kontravariante und kovariante Indizes

1. der Vierervektor x^μ ist ein Tensor der Stufe $\binom{1}{0}$.
2. der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ ist ein Tensor der Stufe $\binom{0}{2}$.

* Man kann über ein Paar von kontra- und kovarianten Indizes **kontrahieren** (verjüngen). Aus einem Tensor der Stufe $\binom{r}{s}$ wird so ein Tensor der Stufe $\binom{r-1}{s-1}$.

Beispiel: falls T^α_λ Tensor der Stufe $\binom{2}{1}$, dann ist T^α_α Tensor der Stufe $\binom{1}{0}$.

Beweis: wegen $\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} = \delta^\mu_\kappa$ hat man $T'^{\alpha\beta}_\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} T^{\kappa\lambda}_\mu = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\lambda} T^{\mu\lambda}_\mu$ QED

* die Linearkombination von 2 Tensoren der Stufe $\binom{r}{s}$ ist ein Tensor der Stufe $\binom{r}{s}$.

* man kann Tensoren **symmetrisieren** oder **antisymmetrisieren**

$$T^{(\kappa\lambda)}_\mu := \frac{1}{2!} \left(T^{\kappa\lambda}_\mu + T^{\lambda\kappa}_\mu \right) , \quad T^{[\kappa\lambda]}_\mu := \frac{1}{2!} \left(T^{\kappa\lambda}_\mu - T^{\lambda\kappa}_\mu \right)$$

oder auch

$$T^{[\kappa\lambda\mu]}_{\rho\sigma} := \frac{1}{3!} \left(T^{\kappa\lambda\mu}_{\rho\sigma} + T^{\lambda\mu\kappa}_{\rho\sigma} + T^{\mu\kappa\lambda}_{\rho\sigma} - T^{\kappa\mu\lambda}_{\rho\sigma} - T^{\mu\lambda\kappa}_{\rho\sigma} - T^{\lambda\kappa\mu}_{\rho\sigma} \right)$$

Quotiententheorem: Sei $T = US$, wobei T Tensor der Stufe $\binom{p+r}{q+s}$ und U Tensor der Stufe $\binom{r}{s}$ ist. Dann ist S Tensor der Stufe $\binom{p}{q}$.

Illustration der Beweisidee an einem Beispiel:

'Sei $T^{\mu\nu}_{\kappa\lambda} = U^{\mu} S^{\nu}_{\kappa\lambda}$. Dann ist S Tensor der Stufe $\binom{1}{2}$.' Anwenden auf Vektoren ξ, η gibt

$$\underbrace{T^{\mu\nu}_{\kappa\lambda} \xi_{\mu} \xi_{\nu} \eta^{\kappa} \eta^{\lambda}}_{\text{skalar}} = \underbrace{(U^{\mu} \xi_{\mu})}_{\text{skalar}} \cdot (S^{\nu}_{\kappa\lambda} \xi_{\nu} \eta^{\kappa} \eta^{\lambda})$$

Bei Koordinatenwechseln $\xi \mapsto \xi', \eta \mapsto \eta'$ hat man den **Skalar**, in beiden Systemen

$$S^{\alpha}_{\rho\sigma} \xi_{\alpha} \eta^{\rho} \eta^{\sigma} = S^{\nu}_{\kappa\lambda} \xi_{\nu} \eta^{\kappa} \eta^{\lambda} = S'^{\nu}_{\kappa\lambda} \xi'_{\nu} \eta'^{\kappa} \eta'^{\lambda} = S'^{\nu}_{\kappa\lambda} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} \xi_{\alpha} \eta^{\rho} \eta^{\sigma}$$

Dies gilt für alle ξ_{α} und η^{ρ} . Daher $S^{\alpha}_{\rho\sigma} = S'^{\nu}_{\kappa\lambda} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}}$. Invertierung ergibt

$$S'^{\nu}_{\kappa\lambda} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\kappa}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda}} S^{\alpha}_{\rho\sigma}$$

wie behauptet.

Definition: Sei $D := \det \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$ die Jacobideterminante der Transformation $x \mapsto x'$. Die Komponenten einer **Tensordichte mit Gewicht w der Stufe $\binom{r}{s}$** transformieren wie:

$$S'^{\mu_1 \dots \mu_r}{}_{\lambda_1 \dots \lambda_s} = D^{-w} \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_r}}{\partial x^{\rho_r}} \cdot \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\lambda_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_s}}{\partial x'^{\lambda_s}} S^{\rho_1 \dots \rho_r}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_s}$$

Beispiele:

- 1) der total antisymmetrische Tensor mit Komponenten $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}$, hat $w = -1$
 2) wegen $g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} g_{\rho\sigma}$ hat man

$$g' = \det g'_{\mu\nu} = \left(\det \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \right)^2 \det g_{\rho\sigma} = D^{-2} g$$

Die Determinante des metrischen Tensors ist eine Tensordichte mit $w = 2$.

Folgerung: $4D$ Volumenelement $dV = \frac{1}{4!} \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} dx^{\kappa} dx^{\lambda} dx^{\mu} dx^{\nu}$

$$dV' = \frac{1}{4!} \varepsilon'_{\kappa\lambda\mu\nu} dx'^{\kappa} dx'^{\lambda} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = \frac{1}{4} \left(\det \frac{\partial x'}{\partial x} \right) \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} dx^{\kappa} dx^{\lambda} dx^{\mu} dx^{\nu} = D dV$$

☞ **invariantes Volumenelement** $\sqrt{g'} dV' = \sqrt{g} dV$,

im Minkowskiraum hat man dagegen $\sqrt{-g'} dV' = \sqrt{-g} dV$

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Mannigfaltigkeit, <i>f</i>	variété, <i>f</i>
Großkreis, <i>m</i>	grand cercle, <i>m</i>
Orthodrome, <i>f</i>	orthodromie, <i>f</i>
Geodäte, <i>f</i>	géodésique, <i>f</i>
Gauß'sche Koordinate, <i>f</i>	coordonnée gaussienne, <i>f</i>
Gauß'sche Krümmung, <i>f</i>	courbure gaussienne, <i>f</i>
Helikoid, <i>n</i> , Wendelfläche, <i>f</i>	hélicoïde, <i>f</i>
Kathenoid, <i>n</i>	caténoïde, <i>f</i>
Tensor der Stufe $\binom{r}{s}$, <i>m</i>	tenseur de l'ordre $\binom{r}{s}$, <i>m</i>
Spannungstensor, <i>m</i>	tenseur des contraintes, <i>m</i>
Verzerrungstensor, <i>m</i>	tenseur des déformations, <i>m</i>
kontraktieren, <i>verjüngen</i>	contracter

le genre grammatical des substantifs (*m, f*) est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m, f, n) der Substantive ist angegeben*