Allgemeine Relativitätstheorie: Übungen & Lösungen

Malte Henkel

[a]Laboratoire de Physique de Chimie Théoriques (CNRS UMR 7019),
Université de Lorraine **Nancy**, France

[b]Centro de Física Téorica e Computacional, Universidade de Lisboa, Portugal

E-Post/courriel: malte.henkel@univ-lorraine.fr

Vorlesung Wintersemester 2020/21, Université de Sarrebruck

Some further reading

L. Ryder, *General relativity*, Cambridge Univ. Press (2009)

T.P. Cheng, *Relativity, Gravitation and Cosmology*, 2^e
Oxford Univ. Press (2010)

S. Weinberg, *Gravitation and cosmology*, Wiley (1978)

C.M. Will, *Confrontation between general relativity and experiments*,
Liv. Rev. Relativity **9**, 3 (2006) & **17**, 4 (2014)

C.M. Will, *...und Einstein hatte doch Recht/Les enfants d'Einstein*,
Springer (1986)

Komplette Übersicht über die Vorlesung

Serie 1

1. Zu dem Geschwindigkeitsvektor (Raumvektor=Dreiervektor) $\boldsymbol{v}$ gehört der **Vierervektor** (**quadri-vecteur**) $\mathtt{u} = (u^0, \boldsymbol{u})$ der **Vierergeschwindigkeit** (**quadri-vitesse**). Wie kann man folgende Ausdrücke beschreiben:

1. u^0 durch $v := |\boldsymbol{v}|$.
2. u^j mit $j = 1, 2, 3$ durch $\boldsymbol{v}$.
3. u^0 durch u^j
4. $\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau$ (wobei τ die **Eigenzeit/temps propre** ist) durch $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ und $\boldsymbol{v}$
5. v^j durch u^j, mit $j = 1, 2, 3$
6. $v = |\boldsymbol{v}|$ durch u^0

Lösung:

Man hat stets $\mathrm{u} = (u^0, \boldsymbol{u})$, wobei

$u^0 = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \gamma$, $\boldsymbol{u} = \gamma \boldsymbol{v}$, mit $\gamma = \left(1 - v^2\right)^{-1/2}$ und $c = 1$ gesetzt.

Um diesen Punkt einzusehen, beginne man mit $\mathrm{u}^2 = -1 \Leftrightarrow -\left(u^0\right)^2 + \left(\boldsymbol{u}\right)^2 = -1$.

Mit den Definitionen von oben gibt das $-\gamma^2 + \gamma^2 \boldsymbol{v}^2 = -1$ und daraus dann schließlich $\gamma = \left(1 - v^2\right)^{-1/2}$.

(1) $u^0 = \left(1 - v^2\right)^{-1/2}$ wobei $v = |\boldsymbol{v}|$ Betrag der Dreiergeschwindigkeit

(2) $u^j = \gamma v^j = \left(1 - v^2\right)^{-1/2} v^j$ mit $j = 1, 2, 3$

(3) eine Vierergeschwindigkeit erfüllt immer $\mathrm{u} \cdot \mathrm{u} = -\gamma^2 + \gamma^2 v^2 = -1$.

Daraus $u^0 = \left(1 + \left(\boldsymbol{u}\right)^2\right)^{1/2} = \left(1 + u^j u_j\right)^{1/2}$

(4) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \left(1 - v^2\right)^{-1/2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$

(5) $v^j = u^j / u^0 = u^j \left(1 + u^j u_j\right)^{-1/2}$

(6) $v = |\boldsymbol{v}| = \left(1 - \left(u^0\right)^2\right)^{1/2}$

2. Man betrachte zwei "**Lorentzboosts**", nämlich L_x in der x-Richtung und L_y in der y-Richtung. Wie lauten die Matrizen für die zusammengesetzten Lorentztransformationen $L_y L_x$ und $L_x L_y$? Vertauschen diese Lorentztransformationen ?

Lösung:

Die Matrizen der Lorentztransformationen in x- und y-Richtung sind

$$L_x = \begin{pmatrix} \gamma_x & \gamma_x v_x & & \\ \gamma_x v_x & \gamma_x & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \; , \quad L_y = \begin{pmatrix} \gamma_y & 0 & \gamma_y v_y & \\ 0 & 1 & 0 & \\ \gamma_y v_y & 0 & \gamma_y & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

wobei $\gamma_x = \left(1 - v_x^2\right)^{-1/2}$ und $\gamma_y = \left(1 - v_y^2\right)^{-1/2}$.

Leere Plätze sind Null

Hintereinanderausführung der Lorentztransformation erfolgt durch Matrixmultiplikation

$$\begin{aligned} L_x L_y &= \begin{pmatrix} \gamma_x & \gamma_x v_x & & \\ \gamma_x v_x & \gamma_x & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_y & 0 & \gamma_y v_y & \\ 0 & 1 & 0 & \\ \gamma_y v_y & 0 & \gamma_y & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_x \gamma_y & \gamma_x v_x & \gamma_x \gamma_y v_y & \\ \gamma_x \gamma_y v_x & \gamma_x & \gamma_x \gamma_y v_x v_y & \\ \gamma_y v_y & 0 & \gamma_y & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\ L_y L_x &= \begin{pmatrix} \gamma_x \gamma_y & \gamma_y \gamma_x v_x & \gamma_y v_y & \\ \gamma_x v_x & \gamma_x & 0 & \\ \gamma_x \gamma_y v_y & \gamma_x \gamma_y v_x v_y & \gamma_y & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \left(L_x L_y\right)^T \neq L_x L_y \end{aligned}$$

☞ *Lorentztransformationen in verschiedenen Raumrichtungen vertauschen nicht.*

3. Sei $\mathtt{u}$ ein kontravarianter Vierervektor und $\mathtt{v}$ ein kovarianter Vierervektor. Zeigen Sie, daß das Skalarprodukt $\mathtt{u} \cdot \mathtt{v} = u^\mu v_\mu$ lorentzinvariant ist.

Lösung:
Für einen kontravariant transformierenden Vektor $u^\mu \mapsto u'^\mu = \Lambda^\mu_\nu u^\nu$
Für einen kovariant transformierenden Vektor $v_\mu = \eta_{\mu\nu} v^\nu$ reduziert man auf den kontravarianten Fall.

Das Skalarprodukt ist $\mathtt{u} \cdot \mathtt{v} = u^\mu v_\mu = u^\mu v^\nu \eta_{\mu\nu}$. Damit

$$\begin{aligned}
\mathtt{u} \cdot \mathtt{v} \mapsto \mathtt{u}' \cdot \mathtt{v}' &= \eta_{\mu\nu} u'^\mu v'^\nu \\
&= \underbrace{\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma}_{=\eta_{\rho\sigma}} u^\rho v^\sigma \\
&= \eta_{\rho\sigma} u^\rho v^\sigma = \mathtt{u} \cdot \mathtt{v}
\end{aligned}$$

Alternative: man kann direkt die Transformation von v_μ herleiten: $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$

$$v_\mu \mapsto v'_\mu = \eta_{\mu\nu} v'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho v^\rho = \Lambda^\rho_\mu v_\rho$$

$$\Rightarrow \quad \mathtt{u}' \cdot \mathtt{v}' = \eta_{\mu\nu} u'^\mu v'^\nu = \underbrace{\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\sigma_\nu} u^\rho v_\sigma = \eta_{\sigma\rho} u^\rho v_\sigma = \mathtt{u} \cdot \mathtt{v}$$

4. Zwei **Inertialsysteme** (**repères d'inertie**) bewegen sich mit den Dreiergeschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$. Zeigen Sie, daß der Betrag ihrer Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\boldsymbol{v}^2 = \frac{(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)^2 - (\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2)^2}{(1 - \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2)^2} \tag{1}$$

für die Germanophonen: $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ bezeichnet das **Vektorprodukt** (**produit vectoriel**) der $3D$ Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$; in Deutschland üblicherweise geschrieben als $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

Es gilt $|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta$, wobei θ der Winkel zwischen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ ist. Ferner $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$

Lösung:
Seien u_1 und u_2 die Vierergeschwindigkeiten in beiden Inertialsystemen.
Im System 1 hat man $\mathrm{u}_1 = (1, 0)$, $\mathrm{u}_2 = (\gamma, \gamma \boldsymbol{v})$ mit $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$
Dann gilt $\mathrm{u}_1 \cdot \mathrm{u}_2 = -\gamma$ und dies ist lorentzinvariant.
In einem beliebigen *dritten* Inertialsystem hat man $\mathrm{u}_1 = (\gamma_1, \gamma_1 \boldsymbol{v}_1)$ und $\mathrm{u}_2 = (\gamma_2, \gamma_2 \boldsymbol{v}_2)$. Damit

$$\left(1 - v^2\right)^{-1/2} = \gamma \stackrel{!}{=} -\mathrm{u}_1 \cdot \mathrm{u}_2 = \gamma_1\gamma_2 - \gamma_1\gamma_2 \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2$$

und unterscheide zwischen den Skalarprodukten im Minkowskiraum und im $3D$ Raum !
Das gibt $1 - v^2 = \left(\gamma_1\gamma_2\right)^{-2}\left(1 - \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2\right)^{-2}$. Auflösen nach v^2 ergibt

$$\begin{aligned}
v^2 &= \frac{\left(1 - \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2\right)^2 - \left(1 - v_1^2\right)\left(1 - v_2^2\right)}{\left(1 - \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2\right)^2} \\
&= \frac{1 - 2\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \left(\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2\right)^2 - 1 + v_1^2 + v_2^2 - v_1^2 v_2^2}{\left(1 - \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2\right)^2} \\
&= \frac{\left(v_1^2 - 2\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 + v_2^2\right) + v_1^2 v_2^2 \left(\cos^2\theta - 1\right)}{\left(1 - \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2\right)^2} = \frac{(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)^2 - (\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2)^2}{(1 - \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2)^2}
\end{aligned}$$

wie behauptet.

hier ist θ der Winkel zwischen $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$: $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = v_1 v_2 \cos\theta$

5. Auf einer sehr langen geraden Schiene (die man sich entlang der x-Achse denken kann) rollt ein Zug mit der Geschwindigkeit v. In diesem Zug steht ein Tisch mit einer Modelleisenbahn, dessen Zug sich ebenfalls entlang der x-Achse bewegt und mit der Relativgeschwindigkeit v. Auf dem Modelleisenbahnzug rollt ein Miniaturmodell, mit Relativgeschwindigkeit v in Bezug auf den Modellzug, ebenfalls in der x-Richtung.
Wenn man sich diese Prozedur n-fach iteriert vorstellt, wie groß ist die Relativgeschwindigkeit v_n des n-ten Zuges ? Was passiert im Grenzfall (limite) $n \to \infty$?

Wer will, kann an die Flöhe von Jonathan Swift (irischer Satiriker, 1667-1745) denken:

So, naturalists observe, a flea
Hath smaller fleas that on him prey;
And these have smaller still to bite them;
And so proceed ad infinitum.
Thus every poet, in his kind,
Is bit by him that comes behind.

Lösung:
Da alle Geschwindigkeiten parallel sind, genügt es, die Rapiditäten zu addieren: $v = \tanh\theta$. Damit

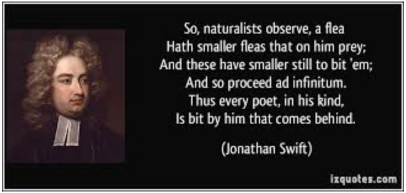
$$\theta_n = n\theta$$

oder

$$\begin{aligned} v_n &= \tanh\theta_n = \tanh\bigl(n\,\mathrm{artanh}\,v\bigr) \\ &= \tanh\left(\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{n/2}\right) = \frac{1-\bigl[(1-v)/(1+v)\bigr]^n}{1+\bigl[(1-v)/(1+v)\bigr]^n} \end{aligned}$$

wobei man verwendet: $\mathrm{artanh}\,x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ und $\tanh x = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

Für $n \to \infty$ hat man $v_n \to 1 = c$.



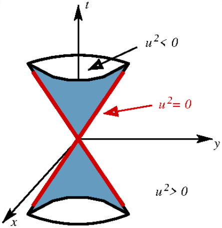
Source: `https://www.quotemaster.org/Flea`

6. Das Minkowski'sche Skalarprodukt $\mathtt{u}^2 = \mathtt{u} \cdot \mathtt{u}$ eines Vierervektors $\mathtt{u}$ mit sich selbst erlaubt folgende, relativistisch invariante Klassifizierung von Vierervektoren (mit der in der Vorlesung verwendeten Konvention $\mathtt{u}^2 := -\left(u^0\right)^2 + \left(u^1\right)^2 + \left(u^2\right)^2 + \left(u^3\right)^2$):

$$\text{falls} \begin{cases} \mathtt{u}^2 < 0 & \mathtt{u} \text{ ist } \textbf{zeitartig} \ (\textbf{courbe de temps}) \\ \mathtt{u}^2 = 0 & \mathtt{u} \text{ ist } \textbf{lichtartig} \ (\textbf{courbe de lumière}) \\ \mathtt{u}^2 > 0 & \mathtt{u} \text{ ist } \textbf{raumartig} \ (\textbf{courbe d'espace}) \end{cases} \tag{2}$$

Für einen nicht raumartigen Vierervektor kann man ferner unterscheiden, in **zukunftsgerichtete** Vierervektoren mit $u^0 > 0$ und **vergangenheitsgerichtete** Vierervektoren mit $u^0 < 0$. Ist diese Einteilung lorentzinvariant ?
Anders gefragt, kann man eine Lorentztransformation finden, die für einen zeitartigen oder lichtartigen Vierervektor $\mathtt{u}$ es erlaubt, von $u^0 > 0$ nach $u'^0 < 0$ überzugehen ? Zeichnen Sie qualitativ einen Lichtkegel mit zukunftsgerichteten und vergangenheitsgerichteten Vierervektoren.

Lösung:



Der Lichtkegel in $1+2$ Dimensionen dient zur Illustration.

Die Lorentztransformation für u^0 ist

$$u'^0 = \gamma\big(u^0 - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}\big) \qquad (*)$$

? Falls u zeitartig und $u^0 > 0$, gilt dann stets $u'^0 > 0$?

Falls u zeitartig, dann hat man $\left(u^0\right)^2 - \boldsymbol{u}^2 > 0 \Rightarrow u^0 > |\boldsymbol{u}| \geq 0$.
Da die Relativgeschwindigkeit $|\boldsymbol{v}| \leq 1$ $(c=1)$, hat man (verwende die Cauchy-Schwarz Ungleichung im ersten Schritt)

$$|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}| \leq |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \leq |\boldsymbol{u}| < u^0$$

und aus der Lorentztransformation folgt dann $u'^0 > 0$.
Analog kann man für u lichtartig argumentieren: die Lorentztransformation (*) ändert nicht das Vorzeichen von u^0.