

In den Aufgabenstellungen (énonçés de problème) wird im Allgemeinen $\boxed{c = 1}$ vorausgesetzt.

1. Zu dem Geschwindigkeitsvektor (Raumvektor=Dreiervektor) \mathbf{v} gehört der **Vierervektor (quadri-vecteur)** $u = (u^0, \mathbf{u})$ der **Vierergeschwindigkeit (quadri-vitesse)**. Wie kann man folgende Ausdrücke beschreiben:

- (a) u^0 durch $v := |\mathbf{v}|$.
- (b) u^j mit $j = 1, 2, 3$ durch \mathbf{v} .
- (c) u^0 durch u^j
- (d) $d/d\tau$ (wobei τ die **Eigenzeit/temps propre** ist) durch d/dt und \mathbf{v}
- (e) v^j durch u^j , mit $j = 1, 2, 3$
- (f) $v = |\mathbf{v}|$ durch u^0

2. Man betrachte zwei "Lorentzboosts", nämlich L_x in der x -Richtung und L_y in der y -Richtung. Wie lauten die Matrizen für die zusammengesetzten Lorentztransformationen $L_y L_x$ und $L_x L_y$? Vertauschen diese Lorentztransformationen?

3. Sei u ein kontravarianter Vierervektor und v ein kovarianter Vierervektor. Zeigen Sie, daß das Skalarprodukt $u \cdot v = u^\mu v_\mu$ lorentzinvariant ist.

4. Zwei **Inertialsysteme (repères d'inertie)** bewegen sich mit den Dreiergeschwindigkeiten \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 . Zeigen Sie, daß der Betrag ihrer Relativgeschwindigkeit \mathbf{v} durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\mathbf{v}^2 = \frac{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2)^2}{(1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2} \quad (1)$$

5. Auf einer sehr langen geraden Schiene (die man sich entlang der x -Achse denken kann) rollt ein Zug mit der Geschwindigkeit v . In diesem Zug steht ein Tisch mit einer Modelleisenbahn, dessen Zug sich ebenfalls entlang der x -Achse bewegt und mit der Relativgeschwindigkeit v . Auf dem Modelleisenbahnzug rollt ein Miniaturmodell, mit Relativgeschwindigkeit v in Bezug auf den Modellzug, ebenfalls in der x -Richtung.

Wenn man sich diese Prozedur n -fach iteriert vorstellt, wie groß ist die Relativgeschwindigkeit v_n des n -ten Zuges? Was passiert im Grenzfall (limite) $n \rightarrow \infty$?

Wer will, kann an die Flöhe von Jonathan Swift (irischer Satiriker, 1667-1745) denken:

*So, naturalists observe, a flea
Hath smaller fleas that on him prey;
And these have smaller still to bite them;
And so proceed ad infinitum.
Thus every poet, in his kind,
Is bit by him that comes behind.*

6. Das Minkowski'sche Skalarprodukt $u^2 = u \cdot u$ eines Vierervektors u mit sich selbst erlaubt folgende, relativistisch invariante Klassifizierung von Vierervektoren (mit der in der Vorlesung verwendeten Konvention $u^2 := -(u^0)^2 + (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2$):

$$\text{falls } \begin{cases} u^2 < 0 & u \text{ ist zeitartig (courbe de temps)} \\ u^2 = 0 & u \text{ ist lichtartig (courbe de lumière)} \\ u^2 > 0 & u \text{ ist raumartig (courbe d'espace)} \end{cases} \quad (2)$$

Für einen nicht raumartigen Vierervektor kann man ferner unterscheiden, in **zukunftsgerichtete** Vierervektoren mit $u^0 > 0$ und **vergangenheitsgerichtete** Vierervektoren mit $u^0 < 0$. Ist diese Einteilung lorentzinvariant ?

Anders gefragt, kann man eine Lorentztransformation finden, die für einen zeitartigen oder lichtartigen Vierervektor u es erlaubt, von $u^0 > 0$ nach $u'^0 < 0$ überzugehen ? Zeichnen Sie qualitativ einen Lichtkegel mit zukunftsgerichteten und vergangenheitsgerichteten Vierervektoren.

7. Zeigen Sie, daß die Kurve

$$t = \int d\lambda r, \quad x = \int d\lambda r \cos \theta \cos \phi, \quad y = \int d\lambda r \cos \theta \sin \phi, \quad z = \int d\lambda r \sin \theta \quad (3)$$

wobei $r = r(\lambda)$, $\theta = \theta(\lambda)$ und $\phi = \phi(\lambda)$ beliebige Funktionen sind, lichtartig ist. Im Englischen heißt eine solche Kurve auch **null curve**.

Hinweis: man betrachte das infinitesimale Längenelement ds^2 .

Unter welchen Bedingungen wird diese Kurve eine **Geodäte/ligne géodésique**, d.h. in diesem Fall eine Gerade ?

8. Zeigen Sie, daß ein freies Elektron ein einzelnes Photon weder absorbieren noch emittieren kann.

9. (a) Im Prozeß der **Comptonstreuung (diffusion de Compton)** trifft ein Photon mit der Wellenlänge λ auf ein ruhendes Elektron der Masse m_e und wird unter einem **Streuwinkel (angle de diffusion)** θ und der Wellenlänge λ' wieder ausgesandt. Zeigen Sie, daß gilt (h ist die Planck'sche Konstante)

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e} (1 - \cos \theta) \quad (4)$$

(b) Man spricht vom **inversen Comptoneffekt (effet de Compton inverse)** wenn ein Photon von einem geladenen Teilchen mit einer sehr großen Geschwindigkeit $|\mathbf{v}| \lesssim c = 1$ gestreut wird. Welche Energie kann ein geladenes Teilchen der Masse m und der Energie $E \gg m$ (gemessen im **Laborsystem/repère d'inertie de laboratoire**) bei frontaler Kollision mit einem Photon der Frequenz ν (und $h\nu \gg m$) maximal auf das Photon übertragen ?

(c) Das Universum ist von einem kalten Gas von Photonen mit der Temperatur von 3[K] erfüllt. Protonen der intergalaktischen **kosmischen Strahlung (rayonnement cosmique intergalactique)** können Energien bis zu 10^{20} [eV] haben. Wieviel Energie kann ein Proton der Energie 10^{20} [eV] auf eines der kalten Photonen übertragen ?

10. Ein Teilchen der Masse m und der kinetischen Energie T_0 kollidiert elastisch (d.h. *ohne* Produktion weiterer Teilchen !) mit einem ruhenden Teilchen gleicher Masse und werde unter dem Winkel θ gestreut. Wie groß ist seine kinetische Energie T' nach der Kollision ?

11. Zwei Ringe drehen sich mit betragsmäßig gleichen, aber entgegengesetzt orientierten, Winkelgeschwindigkeiten $\pm\omega$ um ein gemeinsames Zentrum. Auf jedem Ring sitzt ein Beobachter (A bzw. B), und beide sind mit einer guten Uhr exakt gleicher Fabrikation ausgestattet. Sie synchronisieren ihre Uhren in einem der Momente, wo sie aneinander vorbeifliegen.

In dem Augenblick der Passage bemerkt Beobachter B, daß die Uhr von A langsamer geht als seine eigene. Er erwartet daher, daß beim nächsten Treffen seine Uhr weiter vorgeschritten sein sollte. Andererseits macht Beobachter A die analoge Feststellung. Was passiert in der Realität ? Wie verträgt sich das mit den Beobachtungen von A und von B ?