Übungen **ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE/RELATIVITÉ GÉNÉRALE** Série 2

In den Aufgabenstellungen (énonçés de problème) wird im Allgemeinen $\boxed{c=1}$ *vorrausgesetzt.*

1. Die Invariante des Minkowskiraumes lautet, mit dem metrischen Tensor $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$,
$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}\overline{x}^\mu\,\mathrm{d}\overline{x}^\nu \tag{1}$$
wobei die Koordinaten $\overline{x}^\mu$ aus einer Koordinatentransformation $x^\mu \mapsto \overline{x}^\mu$ bestimmt werden. Wie lautet der metrische Tensor g in den neuen Koordinaten ?

2. Ist die Determinante des metrischen Tensors, $g := \det g_{\mu\nu}$ ein Lorentzskalar ?

3. Zeigen Sie, daß das invariante Volumenelement eines vierdimensionalen Raumes gegeben ist durch
$$\mathrm{d}^4V = (-g)^{1/2}\mathrm{d}^4\mathtt{x} = (-g)^{1/2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{2}$$

4. **(a)** Zeigen Sie, daß das *invariante* Volumenelement des dreidimensionalen Raumes für einen Beobachter mit der Vierergeschwindigkeit $\mathtt{u}$ gegeben ist durch
$$\mathrm{d}^3V = (-g)^{1/2}\,u^0\,\mathrm{d}^3x \tag{3}$$
(b) Wie lautet das *invariante* Volumenelement des kontravarianten Impulses $\mathrm{d}^4\mathtt{p}$ im vierdimensionalen Impulsraum ?
(c) Wie lautet das *invariante* dreidimensionale Volumenelement des Impulsraumes *"auf der Massenschale"*, das heißt im Falle der Zwangsbedingung $\sqrt{-\mathtt{p}\cdot\mathtt{p}} = m$?

5. Relativistische Elektrodynamik wird durch den Feldtensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ beschrieben, wobei $\mathtt{A}$ das Vierervektorpotential ist. Auf einen Probekörper der elektrischen Ladung q wirkt dann die Lorentzkraft (frz. *force de Laplace* (sic !)), mit Viererimpuls $\mathtt{p} = m\mathtt{u}$ und Eigenzeit τ
$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = qF^{\mu\nu}u_\nu \tag{4}$$
(a) Betrachten Sie zunächst die nullte Komponente $\mu = 0$ der Gleichung (4). Drücken Sie sie durch die elektrischen und magnetischen Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ aus und zeigen Sie, daß gilt
$$\frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E} \tag{5}$$
(b) Wie lautet die Gleichung für $\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$, ausgedrückt durch $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$?
Hinweis: man betrachte die Raumkomponenten von (4).
(c) Ein Teilchen der elektrischen Ladung q und der Masse m bewege sich auf einer Kreisbahn mit Radius R in einem uniformen Magnetfeld $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$.
(i) Drücken Sie B durch die bekannten Größen und die Kreisfrequenz ω aus.
(ii) Warum kann das Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ im Ruhesystem keine Arbeit an dem Teilchen verrichten ? Was findet ein Beobachter, der sich mit der Relativgeschwidngkeit $\beta\boldsymbol{e}_x$ bewegt ? Welche Geschwindigkeit und insbesondere, welchen Wert von $u^{0'}$ findet er ?
(iii) Berechnen Sie $\mathrm{d}u^{0'}/\mathrm{d}\tau$ und damit auch $\mathrm{d}p^{0'}/\mathrm{d}\tau$. Wieso kann sich die Teilchenenergie ändern, obwohl das Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ doch keine Arbeit verrichtet ?

6. Ein Vektorfeld $J^\alpha(\mathtt{x})$ erfüllt die Kontinuitätsgleichng (Erhaltungssatz) $\partial_\alpha J^\alpha = 0$ und falle für große Abstände $r = |\boldsymbol{r}| \to \infty$ schneller als r^{-2} ab.
(a) Zeigen Sie, daß $Q := \int \mathrm{d}^3x\, J^0$ zeitlich konstant ist.
(b) Zeigen Sie, daß Q ein Lorentzskalar ist, also $\int \mathrm{d}^3x\, J^0 = \int \mathrm{d}^3x'\, J^{0'}$.
Man nennt Q die **erhaltene Ladung** des erhaltenen Viererstromes J^α.

7. Zeigen Sie, daß der folgende zweidimensionale Raum mit der Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}v^2 - v^2\mathrm{d}u^2 \tag{6}$$

identischen zum flachen zweidimensionalen Minkowskiraum mit der Metrik $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2$ ist.
<u>**Hinweis:**</u> finden Sie eine Koordinatentransformation $t = t(v, u)$ und $x = x(v, u)$, die die Minkowskimetrik in die Metrik (6) überführt.
Zeigen Sie ferner, daß für ein nicht beschleunigtes Teilchen die kontravariante Komponente p_u des 'Viererimpulses' $\mathtt{p}$ konstant ist. Gilt das auch für die Komponente p_v ?

8. Zeigen Sie, daß die Metrik einer Kugeloberfläche S^3 im $4D$ Euklidischen Raum lautet:

$$\mathrm{d}s^2 = R^2 \left[\mathrm{d}\alpha^2 + \sin^2\alpha \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \, \mathrm{d}\phi^2\right)\right] \quad ; \quad (R \text{ ist der Kugelradius}) \tag{7}$$

9. Hyperboloide haben die folgende Parameterdarstellung im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\sqrt{s^2+d} \ \cos\varphi \\ b\sqrt{s^2+d} \ \sin\varphi \\ c\, s \end{pmatrix} \quad \text{so daß} \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = d \tag{8}$$

wobei a, b, c Konstante sind und $d = \pm 1$. Für $d = +1$ hat man ein **einschaliges Hyperboloid** (**hyperboloïde à une nappe**) H_1 und für $d = -1$ ein **zweischaliges Hyperboloid** (**hyperboloïde à deux nappes**) H_2.

Für ein einschaliges Hyperboloid kann man wählen $s = \sinh\xi$ und für ein zweischaliges Hyperboloid $s = \cosh\xi$. Geben Sie die Parameterdarstellung in beiden Fällen an und ebenfalls, welche geometrische Bedingung diese beiden Flächen erfüllen. Wie kann man diese geometrisch veranschaulichen ? Wie lautet die Metrik $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$ (für $a = b = c$) und insbesondere der metrische Tensor in beiden Fällen ?

10. **(a)** In euklidischen Räumen kann man den Winkel θ zwischen zwei Vektoren $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{V}$ durch das Skalarprodukt bestimmen, da $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V}}{|\boldsymbol{U}|\,|\boldsymbol{V}|}$. Wie kann man in allgemeineneren Räumen, mit einem metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$, den Winkel zwischen zwei Vektoren definieren ?
(b) Betrachten Sie **konforme Transformationen** $x^\mu \mapsto \overline{x}^\mu$, für die sich definitionsgemäß der metrische Tensor wie folgt transformiert

$$g_{\alpha\beta} \mapsto f(\mathtt{x}) g_{\alpha\beta} \tag{9}$$

wobei $f = f(\mathtt{x}) = f(x^\mu)$ eine beliebige Funktion ist. Zeigen Sie, daß konforme Transformationen alle Winkel invariant lassen. Wie transformieren lichtartige Kurven ?

11. Gegeben sei die Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - \left(\frac{3}{13}\mathrm{d}x + \frac{4}{13}\mathrm{d}y + \frac{12}{13}\mathrm{d}z\right)^2 \tag{10}$$

Ist dies wirklich ein dreidimensionaler Raum ? Versuchen Sie, neue Koordinaten ζ, η zu finden, so daß $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\zeta^2 + \mathrm{d}\eta^2$.