In den Aufgabenstellungen (énonçés de problème) wird im Allgemeinen $\boxed{c = 1}$ *vorrausgesetzt.*

1. Gehen Sie aus von der folgenden Definition der kovarianten Ableitung des metrischen Tensors

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu;\lambda} &:= g_{\mu\nu,\lambda} - g_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} - g_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} \\ \text{mit } \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} &= g^{\mu\rho}\Gamma_{\rho\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left(g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\rho}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

   wobei die $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ die Christoffelsymbole sind. Zeigen Sie, daß dann der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ stets eine verschwindende kovariante Ableitung hat, daß also gilt: $\boxed{g_{\mu\nu;\lambda} = 0}$.

   N.B.: *diese* **Kompatibilitätseigenschaft** *der Metrik ist charakteristisch für die Einstein'schen Gravitationstheorien. Insbesondere sind solche Metriken auch mit flachen Räumen mit Minkowskimetrik kompatibel.*

2. Zeigen Sie, daß für eine *diagonale* Metrik mit metrischem Tensor

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(g_{00}, g_{11}, g_{22}, g_{33}) \tag{2}$$

   die Christoffelsymbole folgende Werte annehmen:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} = 0 \quad &; \quad \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\lambda} = -\frac{1}{2g_{\mu\mu}}\frac{\partial g_{\lambda\lambda}}{\partial x^{\mu}} \\ \Gamma^{\mu}{}_{\mu\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\ln\sqrt{|g_{\mu\mu}|} \quad &; \quad \Gamma^{\mu}{}_{\mu\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\ln\sqrt{|g_{\mu\mu}|} \end{aligned} \tag{3}$$

   Hierbei ist stets $\mu \neq \nu \neq \lambda \neq \mu$ und über wiederholte Indices wird **nicht** summiert !

3. Die **Pseudosphäre** P^2 hat die Metrik $\mathrm{d}s^2 = a^2(\mathrm{d}\xi^2 + \sinh^2\xi\,\mathrm{d}\varphi^2)$ eines Hyperboloides. Was ist die Form der geodätischen Kurven ?

4. In weniger als 4 Dimensionen lassen sich für den Riemanntensor einfache Ausdrücke angeben.

   Geben sie einfache Ausdrücke für den Riemanntensor in $d = 1, 2, 3$ Dimensionen an. Wieviele unabhängige Komponenten hat der Riemanntensor ?

   Hinweis: für $d < 4$ läßt sich der Riemanntensor eindeutig durch den Ricciskalar R und den Riccitensor ausdrücken. Verwenden Sie die bekannten Symmetrieen des Riemanntensors

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = R_{\lambda\sigma\mu\nu} \;\; ; \;\; R_{\mu\nu\lambda\sigma} = -R_{\nu\mu\lambda\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\lambda} \;\; ; \;\; R_{\mu[\nu\lambda\sigma]} = 0 \tag{4}$$

   Die Gravitationsfeldgleichungen im Vakuum lauten $R_{\mu\nu} = 0$. Was bedeutet das für die Gravitation falls $d = 2$ oder $d = 3$?

5. Im Ruhesystem einer perfekten Flüssigkeit mit (Eigen-)Massendichte ρ und Druck p hat der Energie-impulstensor die Form

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} . \tag{5}$$

   Wie lautet der Energie-impulstensor für ein Flüssigkeitselement mit Eigendichte ρ und Eigendruck p, das sich mit der Vierergeschwindigkeit $\mathbf{u}$ bewegt ?