In den Aufgabenstellungen (énonçés de problème) wird im Allgemeinen $\boxed{c = 1}$ *vorrausgesetzt.*

1. Zeigen Sie, daß die Gravitationskraft auf einen Probekörper innerhalb einer gravitierenden Hohlkugel verschwindet.

   Hinweis: das Birkhoff'sche Theorem besagt, daß die Schwarzschildmetrik eine Lösung der Feldgleichungen $R_{\mu\nu} = 0$ im Falle sphärischer Symmetrie ist. Kann eine solche Lösung im Inneren einer Kugel noch Singularitäten haben ?

   Ein analoges Ergebnis gilt auch in der Newton'schen Gravitationstheorie und in der Elektrostatik.

2. Mathematisch hat ein gekrümmter ('Riemannscher') Raum in d Dimensionen eine *konstante Krümmung*, falls der Riemanntensor $R_{\mu\nu\lambda\kappa}$ durch den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ (mit $\det g \neq 0$) wie folgt ausgedrückt werden kann

   $$R_{\mu\nu\lambda\kappa} = K\left(g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa} - g_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda}\right) \tag{1}$$

   wobei die Konstante K die konstante Krümmung beschreibt. Zeigen Sie, daß dann der Riccitensor stets die Form hat

   $$R_{\mu\nu} := g^{\sigma\tau}R_{\sigma\mu\tau\nu} = K(d-1)g_{\mu\nu} \tag{2}$$

   Läßt sich eine allgemeine Aussage über zweidimensionale Räume ($d = 2$) treffen ?
   Hinweise: $g^{\sigma\tau}g_{\sigma\tau} = d$. Man erinnere sich an die allgemeine Form von $R_{\mu\nu\lambda\kappa}$ für $d = 2$.

3. Aus der Untersuchung der Systematik der Galaxienbewegungen, sehr weit entfernt von der Erde, hat sich in den letzten Jahren herausgestellt, daß die folgende Variante der Einsteinschen Feldgleichungen von physikalischem Interesse ist

   $$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad , \quad \kappa := -\frac{8\pi G}{c^2} \tag{3}$$

   wobei Λ *kosmologische Konstante* genannt wird. G ist die Newtonsche Gravitationskonstante.
   a) Was sind die Dimensionen von Λ ?
   b) Zeigen Sie durch eine geeignete Kontraktion, daß der Ricciskalar $R = \kappa T + 4\Lambda$ (mit $T := T^\mu_\mu$) lautet und leiten Sie damit aus (3) die folgendende alternative Form der Feldgleichungen her

   $$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} - \kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \tag{4}$$

   c) Ist ohne äußere Gravitationsquellen, also für $T_{\mu\nu} = 0$, die flache Minkowskimetrik eine Lösung der Feldgleichungen (4) ? Vergleichen Sie die Feldgleichungen (4) ohne Quellen mit der Form (2) eines Riemannschen Raumes konstanter Krümmung. Läßt sich die kosmologische Konstante Λ so geometrisch deuten ?
   d) Im nichtrelativistischen Limes ergibt die Komponente $\mu = \nu = 0$ aus Gl. (4) die Newtonschen Gleichungen. Zeigen Sie, daß man für $\Lambda \neq 0$ eine verallgemeinerte Poissonsche Gleichung erhält

   $$\Delta\phi + \Lambda c^2 = 4\pi G\rho \tag{5}$$

   wobei $\phi = -\frac{c^2}{2}h_{00}$ das Newtonsche Gravitationspotential ist, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} + \ldots$ und Δ bezeichne den üblichen Laplaceoperator.
   e) Zeigen Sie, daß für $\Lambda \neq 0$ man phänomenologisch eine zusätzliche Kraft $F_\Lambda = \frac{1}{3}\Lambda c^2 r$ im Abstand r von jedem Kraftzentrum erhält. Für welche Klasse von Objekten würde man also vor allem meßbare Effekte der Konstanten Λ erwarten ?
   Hinweis: in $3D$ Kugelkoordinaten lautet der Laplaceoperator $\Delta f(r) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left(rf(r)\right)$, im Falle sphärischer Symmetrie.

4. Auf der Oberfläche einer Pseudosphäre P^2 hat man die Metrik (a ist eine feste Länge)

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = a^2\left(\mathrm{d}\chi^2 + \sinh^2\chi \mathrm{d}\phi^2\right) \tag{6}$$

Ist P^2 gekrümmt ist ? Berechnen Sie den Ricciskalar R als Funktion von a. Wodurch unterscheidet sich die Pseudosphäre P^2 von der Kugeloberfläche S^2 ?
Hinweise: Der Riemanntensor R und die Christoffelsymbole Γ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} R^\kappa_{\lambda\mu\nu} &= \Gamma^\kappa_{\lambda\nu,\mu} - \Gamma^\kappa_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^\kappa_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu} \\ \Gamma^\mu_{\nu\lambda} &= \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\rho}) \end{aligned} \tag{7}$$

Wieviele unabhängige Komponenten hat der Riemanntensor für P^2 ? Der Riccitensor ist $R_{\mu\nu} = R^\kappa_{\mu\kappa\nu}$ und der Ricciskalar $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.

5. **(a)** Man wiederhole die Berechnung der Periheldrehung einer elliptischen Keplerbahn für den Fall, daß $\mathcal{R}/r \ll 1$ ist.
(b) Falls der zentrale Stern durch rasche Eigenrotation abgeplattet ist, wir sein Newton'sches Gravitationspotential die phänomenologische Form $V(r) = -Mr^{-1} - AMr^{-3}$ annehmen, wobei A die Abplattung beschreibt. Berechnen Sie im Rahmen der Newtonschen Theorie die aus der Abplattung resultierende Periheldrehung eines auf einer Ellipse umlaufenden Planeten.
(c) Was passiert, wenn die Abplattung der Sonne so groß wäre, daß diese Abplattung alleine die Periheldrehung des Merkur erklären könnte ? Schätzen Sie die Periheldrehung für die ersten vier Planeten des Sonnensystems ab.
Hinweis: man kann die Elliptizität der Bahnen vernachlässigen.

6. Ein Lichtteilchen (*Photon* nach Einstein) bewege sich in einer ebenen Bahn in einer Schwarzschildmetrik. Zeigen Sie, daß die Bahngleichung des Photons lautet:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{3}{2}\frac{\mathcal{R}}{r^2} \tag{8}$$

wobei $\mathcal{R}$ der Schwarzschildradius ist.

7. Benutzen Sie die Bahngleichung (8) aus der vorigen Aufgabe, um die Ablenkung von Lichtstrahlen im Schwerefeld eines Sternes zu berechnen.

8. Ein Teilchen läuft auf einer Kreisbahn von Bahnradius r um einen Stern mit Masse M und Sternradius $R > \mathcal{R}$, wobei $\mathcal{R} = \frac{2GM}{c^2}$ der Schwarzschildradius ist. Zeigen Sie, daß das 3. Kepler'sche Gesetz in der Form

$$\Omega^2 = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{R}}{r^3} \tag{9}$$

gilt, wobei Ω die Winkelgeschwindigkeit auf der Bahn, für einen weit entfernten Beobachter, bedeutet.