In den Aufgabenstellungen (énonçés de problème) wird im Allgemeinen $\boxed{c=1}$ *vorrausgesetzt.*

1. Man betrachte die folgende hypothetische Variante der Einsteingleichungen

$$R_{\mu\nu} - \alpha g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{1}$$

wobei $g_{\mu\nu}$ der metrische Tensor, $T_{\mu\nu}$ der Energieimpulstensor, $R_{\mu\nu}$ und R der Riccitensor und Ricciskalar sind und schließlich α eine freie Konstante ist. Zeigen Sie, daß sich für $\alpha \neq \frac{1}{2}$ nicht der korrekte nichtrelativistische Grenzwert ergibt.

2. Ein Teilchen fällt radial unter dem Einfluß einer Schwarzschildmetrik. In Bezug auf die Eigenzeit im Unendlichen, wie groß ist die einwärts gerichtete Gschwindigkeit $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ für einen Radius r ? Wie groß ist die *lokal gemessene* Geschwindigkeit relativ zu einem stationären Beobachter am gleichen Radius r ?

Hinweis: für radialen Fall kann man mit Hilfe der sogenannten Killingvektoren zeigen, daß u_0 konstant ist, wobei $\mathtt{u}$ die Vierergeschwindigkeit ist. Erinnern Sie sich auch an die Eigenschaft $\mathtt{u} \cdot \mathtt{u} = -1$.

3. Ein Teilchen überquert den Schwarzschildradius $r = \mathcal{R}$ eines durch eine Schwarzschildmetrik beschriebenen schwarzen Loches des Masse M. Zeigen Sie, daß das Teilchen ds Zentrum $r = 0$ spätestens zu der Eigenzeit $\tau_{\max} = \frac{\pi}{2}\mathcal{R}$ erreicht.

Können irgendwelche auf das Teilchen wirkende Kräfte daran etwas ändern ?

Hinweis: im Inneren eines schwarzen Loches fällt ein Teilchen frei nach innen, also gilt stets $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\tau < 0$.

4. Man betrachte die folgende Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}w^2 + \frac{4}{9}\left[\frac{9\mathcal{R}}{4(z-w)}\right]^{2/3} \mathrm{d}z^2 + \left[\frac{9\mathcal{R}}{4}(z-w)^2\right]^{2/3} \mathrm{d}\Omega^2 \tag{2}$$

(a) Die die Elemente des metrischen Tensors explizit von der 'Zeitkoordinaten' w abhängen, könnte man versicht sein, dies als eine dynamische Metrik anzusehen. Zeigen Sie durch geeignete Koordinatenwechsel, daß man für $\mathrm{d}s^2$ die äußere Schwarzschildmetrik zurückerhält.

Hinweis: definieren Sie zunächst eine neue Radialkoordinate $r = \left[\frac{9}{4}\mathcal{R}(z-w)^2\right]^{1/3}$. Diagonalisieren Sie danach die sich für $\mathrm{d}s^2$ ergebende Form durch den Ansatz $z = t + F(r)$, wobei die Funktion $F(r)$ geeignet zu wählen ist.

(b) Wie erfolgt die Bewegung in den Koordinaten w, z ? ($\mathrm{d}\Omega$ ist das übliche Raumwinkelelement)

(c) Zeigen Sie, daß in den Koordinaten w, z stationäre Beobachter sich im freien Fall befinden.

5. Zwei identische Uhren A und B werden am Äquator der Erde synchronisiert. Danach wird die Uhr A zum Nordpol transportiert und verbleibt dort ein Jahr, bevor sie wieder an den gleichen Ort am Äquator zurückkehrt. Während dieser Zeit ist die Uhr B an ihrem Ort auf der Erdoberfläche am Äquator verblieben. Beobachtet man einen Gangunterschied zwischen den beiden Uhren ?

   Verwenden Sie die (äußere) Schwarzschildmetrik, um Ihre Antwort zu begründen. Die Reisezeit der Uhr A zum Nordpol und zum Äquator zurück kann vernachlässigt werden (warum ?).
   (a) Betrachten Sie zunächst eine perfekt kugelförmige Erde, mit Radius $R = 6,38 \cdot 10^6$[m] und der Masse $M = 5,97 \cdot 10^{24}$[kg]. Man hat $G = 6.67 \cdot 10^{-11}[\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}]$.
   (b) Bekanntlich ist die Erde an den Polen abgeplattet (aplâtie), der Unterschied der Radien R_e und R_p, am Äquator und an den Polen, beträgt $R_e - R_p \approx 21$[km]. Kann der Einfluß der Abplattung auf den eventuellen Gangunterschied der Uhren vernachlässigt werden ?

6. Aufgrund neuerer kosmologischer Beobachtungen wird heute ernsthaft erwogen, die Einsteinschen Feldgleichungen durch einen Zusatzterm, parametrisiert durch eine 'kosmologische Konstante' Λ, zu erweitern. Außerhalb einer Masse M lautet im Falle sphärischer Symmetrie die Lösung der erweiterten Feldgleichungen $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$ dann

$$\mathrm{d}s^2 = -Ac^2\,\mathrm{d}t^2 + A^{-1}\,\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2 \quad ; \quad A := 1 - \frac{\mathcal{R}}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \tag{3}$$

   wobei $\mathcal{R} = 2GM/c^2$ der Schwarzschildradius ist. Zeigen Sie, daß für einen weit entfernten Beobachter die Kreisfrequenz $\Omega = \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$ der Umlaufbahn gegeben ist durch:

$$\Omega^2 = \frac{c^2}{2}\frac{\mathcal{R}}{r^3} - \frac{\Lambda c^2}{3} \tag{4}$$

   Welches bekannte physikalische Gesetz erhält man im Fall $\Lambda = 0$? Gibt es eine drastische qualitative Konsequenz, wenn $\Lambda > 0$? Was würde für $\Lambda < 0$ passieren ?