Vorlesung 20.11.2020

Nachfrage: $\int \underset{u'}{\sin(ax)}\,\underset{v}{e^{bx}}\,dx$; Wissen: $(u\cdot v)' = u'v + uv' \;\; | \int$

$\int u'v = [uv] - \int uv'$

$= \left[-\frac{1}{a}\cos(ax)e^{bx}\right] + \frac{b}{a}\int \underset{u'}{\cos(ax)}\,\underset{v}{e^{bx}}\,dx$

$\int \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax)$; $\int e^{bx}dx = \frac{1}{b}e^{bx}$

$\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax)$ $\quad (e^{bx})' = be^{bx}$

$= \left[-\frac{1}{a}\cos(ax)e^{bx}\right] + \frac{b}{a}\left(\left[\frac{1}{a}\sin(ax)e^{bx}\right] - \frac{b}{a}\int \sin(ax)e^{bx}dx\right)$

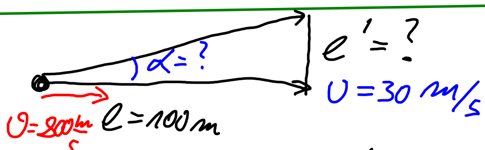
$\int \sin(ax)e^{bx}dx = -\frac{1}{a}\cos(ax)e^{bx} + \frac{b}{a^2}\sin(ax)e^{bx} - \frac{b^2}{a^2}\int \sin(ax)e^{bx}dx$

$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\int \sin(ax)e^{bx}dx = \frac{a^2+b^2}{a^2}\int \sin(ax)e^{bx}dx = \left[-\frac{1}{a}\cos(ax) + \frac{b}{a^2}\sin(ax)\right]e^{bx}$

$\Rightarrow \int \sin(ax)e^{bx}dx = \frac{b\sin(ax) - a\cos(ax)}{a^2+b^2}e^{bx}$

---

5 Jäger geg:



ges: l', α

$v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{100\,m}{800\,m/s} = \frac{1}{8}s \Rightarrow l' = t\cdot v = 3.75\,m$

$\tan\alpha = \frac{l'}{100m} = 0.0375 \Rightarrow \alpha$ $\qquad \sin x \approx x \quad \cos x \sim 1 \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \approx x$

$\Rightarrow \alpha \approx 0.0375$ in rad

$\Rightarrow \alpha = 0.0375\cdot\frac{180°}{\pi} \approx \underline{\underline{2.1°}}$

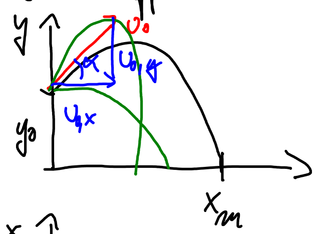
$\frac{180°}{\pi} \approx 57°$

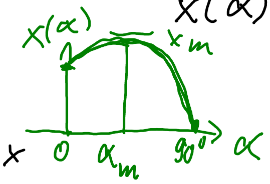
---

6 Wurfparabeln

ges. ist α so dass x = maximal also x_m

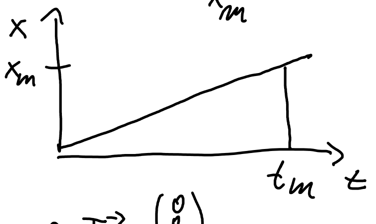
$x(\alpha)$ und $\frac{d\,x(\alpha)}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha_m \Rightarrow x_m$



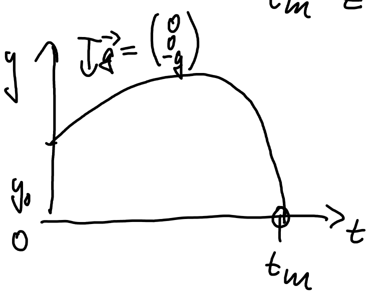


$v_{0,x} = v_0\cdot\cos\alpha$

$v_{0,y} = v_0\cdot\sin\alpha$



$x(t) = v_{0,x}\cdot t = v_0\cos\alpha\cdot t$



$\left.\begin{array}{l} y(t) = y_0 + v_{0,y}\cdot t - \frac{g}{2}t^2 \\ \text{an } t = t_m \text{ ist } y(t_m) = 0 \end{array}\right\} 0 = y_0 + v_0\sin\alpha\cdot t_m - \frac{g}{2}t_m^2$

$t_m^2 - \frac{2v_0}{g}\sin\alpha\cdot t_m - \frac{2y_0}{g} = 0$

$t_{m_{1/2}} = \frac{v_0}{g}\sin\alpha \pm \sqrt{\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2y_0}{g}}$; hier nur „+" sonst $t_m < 0$

einrechnen in $x(t_m(\alpha)) \Rightarrow x(\alpha)$

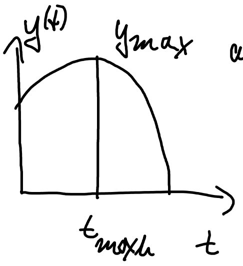
$$\Rightarrow x_m(\alpha) = v_0 \cos\alpha \cdot \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2 y_0}{g}} \right); \quad \frac{d x_m(\alpha)}{d\alpha} = 0$$

$\vdots$

$$\Rightarrow \alpha_m = \arccos\left(\frac{\sqrt{2 g y_0 + v_0^2}}{\sqrt{2 g y_0 + 2 v_0^2}} \right)$$

; a) speziell $y_0 = 0 \Rightarrow \cos\alpha_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 45^\circ}}$

b) $\left.\begin{array}{l} y_0 = 1{,}7\,m \\ v_0 = 10\,m/s \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_m = 41^\circ$

c) 

y_{max} oder y_{max}; $\frac{dy(t)}{dt} = 0$; t_{maxh}

$$0 = v_{0,y} - g \cdot t_{maxh} \Rightarrow t_{maxh} = \frac{v_{0,y}}{g} = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha_m}{g}$$

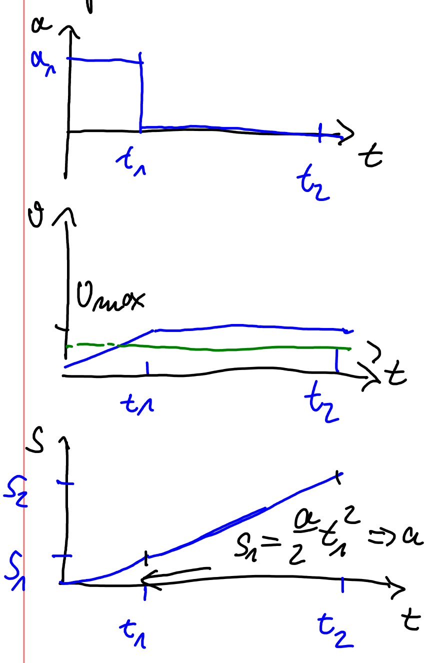
in $y(t)$

$$y_{maxh} = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_m}{g} - \frac{g}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_m}{g^2} = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_m}{2g}$$

$\Rightarrow y_{maxh} = 3{,}9\,m$, analog für $x(t) \Rightarrow x_{max} \underline{\underline{= 11{,}8\,m}}$

---

7 Sprinter



$S_1 = \frac{a}{2} t_1^2 \Rightarrow a = \frac{2 S_1}{t_1^2}$

$t_2 = 11{,}29\,s$

$S_2 = 100\,m$

$S_1 = 18\,m$

ges v_{max}, a

$$v_{max} = a \cdot t_1 = \left(\frac{2 S_1}{t_1^2}\right) \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{2 S_1}{v_{max}}$$

$$v_{max} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$$

$$v_{max} = \frac{S_1 + S_2}{t_2} = 10{,}5\,\frac{m}{s}$$

$\Rightarrow t_1 = 3{,}42\,s$

c) $\bar{v} = \frac{S_2}{t_2} = 8{,}93\,\frac{m}{s}$

$$\bar{v} = 8{,}93\,\frac{10^{-3}\,km}{\frac{1}{3600}\,h} = 8{,}93 \cdot 10^{-3} \cdot 3600\,\frac{km}{h}$$

$$\bar{v} = 8{,}93 \cdot 3{,}6 \cdot \frac{km}{h} = 32\,km/h$$

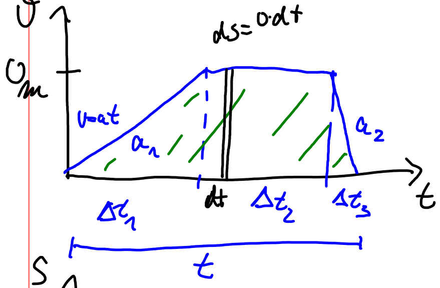
---

8 Anfangs und Endgeschwindigkeit

$S = \frac{a}{2} t^2 + v_0 \cdot t$; $v = a \cdot t + v_0$ $\hat{=}$ 2 Gleichungen in v_0, a wissen $v = 2 v_0$

$a = \frac{v - v_0}{t}$; $S = \frac{v - v_0}{2t} t^2 + v_0 \cdot t = \frac{v + v_0}{2} t$; $v_0 = \frac{2S}{3t} = 10\,m/s$; $v = 20\,m/s$

9 kürzeste Fahrzeit



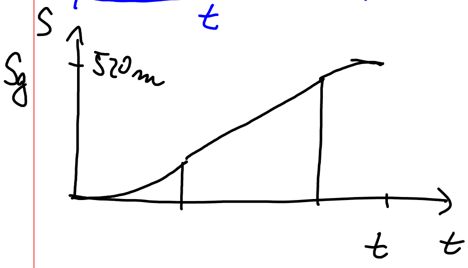
$t_{ges} = t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = \frac{v_m}{a_1} + \Delta t - \frac{v_m}{a_2}$; $a_2 < 0$

Δt_2 aus Weg aus $v \cdot t \mathrel{\hat=}$ Fläche $\quad A = \frac{(a+b)}{2} \cdot h$

$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s$

$= \int \frac{ds}{dt}\,dt = \int_{s_1}^{s_2} ds = s$

$s_g = v_m \frac{(\Delta t_2 + t)}{2}$; $\Delta t_2 = \frac{2s}{v_m} - t$

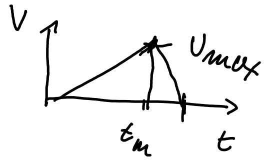


$t = \frac{v_m}{a_1} + \frac{2s}{v_m} - t - \frac{v_m}{a_2}$

$t(v_{max}) = \frac{v_m}{2a_1} - \frac{v_m}{2a_2} + \frac{s}{v_m} \mathrel{\hat=}$ Fkt. in v_{max}

minimieren $\Rightarrow \frac{d\,t(v_{max})}{d\,v_{max}} = 0 \rightsquigarrow v_m$

$\frac{dt}{dv_m} = \frac{1}{2a_1} - \frac{1}{2a_2} - \frac{s}{v_m^2} = 0 \Rightarrow v_m = \sqrt{\frac{2a_1 a_2 s}{a_2 - a_1}} = 41\,m/s \mathrel{\hat=}$



zeigen, dass $\Delta t_2 = 0$

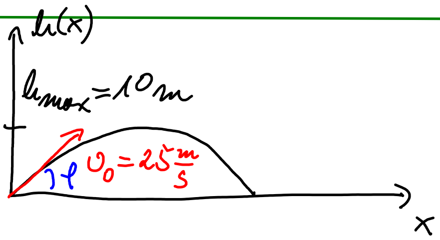
z.B. $s_1 = \frac{a_1}{2}\Delta t_1^2 + v_0 t_1$; $v_0 = 0$; $\Delta t_1 = \frac{v_m}{a_1} \Rightarrow s_1 = \frac{v_1^2}{2a_1} = 350m$

analog $s_3 = 170m$ sehen $s_1 + s_3 = s_{ges}$, kein Δt_2

$t_{gesamt} = \Delta t_1 + \Delta_2 = 25,3\,s$ mit $v_{max} = 41\frac{m}{s} = 150\frac{km}{h}$

aber mit $v_{max} = 130\,km/h \Rightarrow \Delta t_{ges} = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = 25,5\,s$ wenn $v_{max} = 130\frac{km}{h}$

10 Fussball in 2D

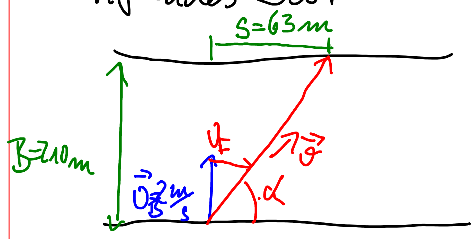


Wieder Komponenten werden als x und y getrennt.

$\Rightarrow \varphi = 34°$; $v_x, v_y \Rightarrow t = 1,43\,s$

$\Rightarrow x_m = t \cdot v_x = 59.2\,m$

11 Driftendes Boot

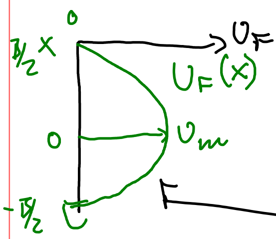


$B = 210m$, $S = 63m$ $\Big\}$ $\tan\alpha = \frac{210m}{63m} \Rightarrow \alpha = 73°$

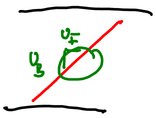
$v_F = v_B \cdot \frac{S}{B} = 0,6\,m/s$

$v = \sqrt{v_B^2 + v_F^2} = 2,1\,m/s$

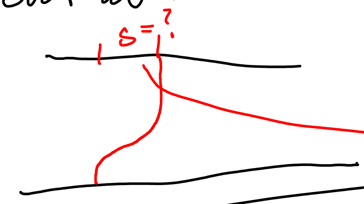
12 mit echtem Fluss



Wieviel driftet das Boot ab?

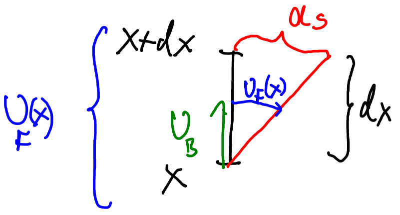


oben links



wo gegeben

infinitesimale Stücke



$$ds = \frac{v_F(x)}{v_B}\,dx$$

Abdrift aus Summe der vielen kleinen ds

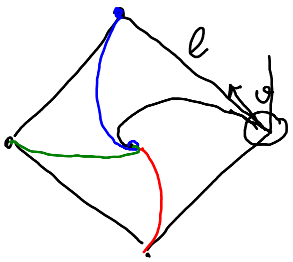
$$S = \int ds = \int_{-B/2}^{B/2} \frac{v_F(x)}{v_B}\,dx = \int_{-B/2}^{B/2} \frac{v_m}{v_B}\left(1 - \frac{4x^2}{B^2}\right)dx$$

$$S = \frac{v_m}{v_B}\left[x - \frac{4x^3}{3B^2}\right]_{-B/2}^{B/2} = \frac{2}{3}B\frac{v_m}{v_B} = 42\,m$$

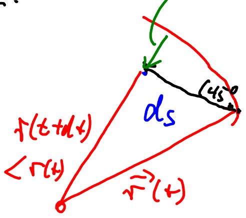
---

zu den Schildkröten

Tip 1: zu jeder Zeit ein Quadrat ⇒ t gesamt mit l und v



Tip 2: dr innerhalb dt abgenommen



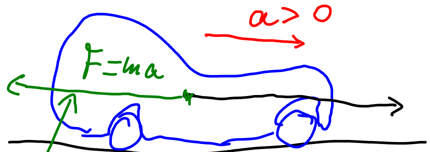
in dt wird $v \cdot dt = ds$

$$\Rightarrow r(t) = \int_?^? dr = \int_0^t \dots\, dt$$

Nachtrag zu Scheinkräften, actio = reactio, $\sum \vec F_i = 0$

immer wenn Beschleunigungen auftreten, nicht Inertialsysteme

z.B. Trägheit



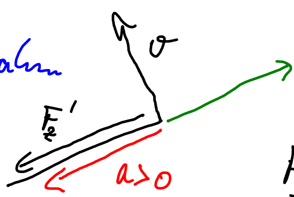
F = echt durch Motor
z.B. elektromag. Kräfte

Gegenkraft als Scheinkraft mit

$F = m \cdot a \quad \Rightarrow \sum \vec F_i = 0$

⇒ Beschleunigungskräfte auch eintragen sonst $\sum \vec F_i \neq 0$

analog Kreisbahn



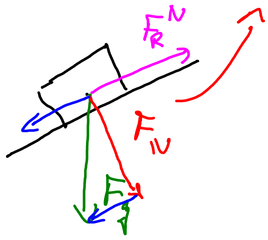
F_z = Zentrifugalkraft

F_z' = Zentripetalkraft, muss aus „echter" Kraft aufgebracht werden um auf Kreisbahn zu bleiben.

echte Kräfte auch Feder

Vorlesungsstoff

<u>Wahl</u>: Reibung $\hat{=}$ phänomenologisch sehr einfach $F_R \propto F_N$ ← Normalkraft

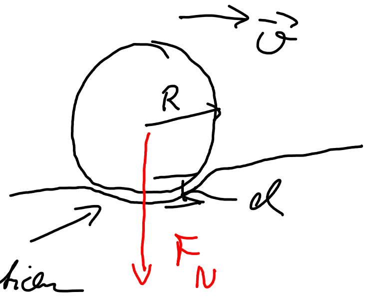


→ Haftreibung $v=0$ $\quad F_R^H = \mu_H \cdot F_N$

→ Gleitreibung $\vec{v}>0$ $\quad F_R^G = \mu_G \cdot F_N$

→ Rollreibung $v>0$ $\quad F_R^R = \mu_R \cdot F_N$

↑ Fkt von Material & R



oft $\mu_R = \dfrac{d\text{-Eindellung}}{R\text{-Radradius}}$ Deformation

typische μ_R 0,0005 – 0,001 – Kugellager, Eisenbahnrad

0,015 – Autoreifen Straße

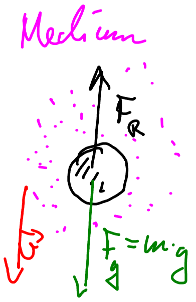
0,05 – " – auf Erdweg

→ Reibung durch Bewegung in viskosen Medien (2.13. Luft, Wasser)

⇒ Luftwiderstand

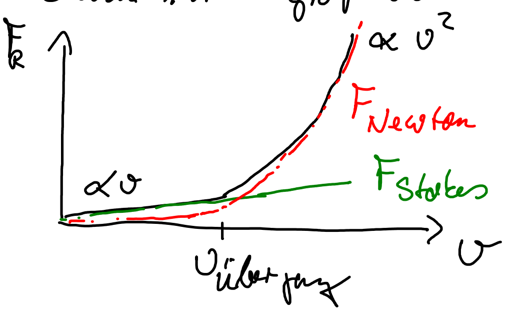
Unterscheidungen

v klein $\hat{=}$ laminar	v groß $\hat{=}$ turbulente Bewegung
Kugel $F_R = 6\pi\eta \cdot R \cdot v$	$F_R = c_W \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\rho \cdot v^2}_{\text{Staudruck}} \cdot A$ ← Querschnittsfläche
<u>Stokes Reibung</u>	<u>Newton-Reibung</u> $[\,] = \frac{kg}{m^3}\cdot\frac{m^2}{s^2} = \frac{N}{m^2}$
wenn $F_R = F_g \Rightarrow \sum F_i = 0$	c_W – von Geometrie
$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow v = \text{const.}$	$c_W^{\text{Fallschirm}} = 1,4$
η – Viskosität = Materialparameter Flüssigkeit / Gas	Mensch, LKW $\approx 0,8$
$\eta_{Luft} = 0,02\ mPas$; $1\,Pa = \frac{1N}{m^2}$	Auto, $\simeq 0,3$; Weltrekord 0,075 bei Auto
$\eta_{H_2O} = 1\ mPas$	Pinguin 0,03
$\eta_{Honig} = 10000\ mPas$	Tropfen ideal 0,02

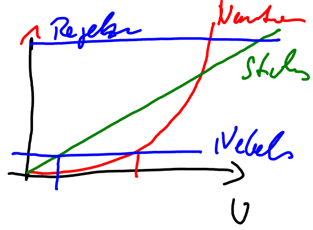




Wann ist υ groß oder υ klein?



} immer das größte F_R zählt



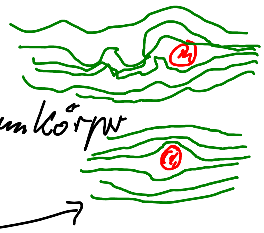
oder über Reynolds-Zahl, aus Strömungsphysik

Def.: $Re \stackrel{!}{=} \frac{\rho \cdot \upsilon \cdot d}{\eta}$ ← $d \hat{=}$ Abmaße des Objektes

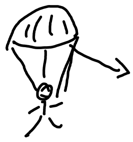
$[Re]$ = dimensionslos

wenn $Re \gg 1 \Rightarrow$ turbulent

$Re \ll 1 \Rightarrow$ laminar } Strömung um Körper



Bsp. i) Rundkappenfallschirm

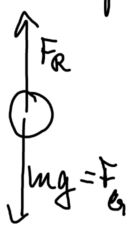


$d \simeq 10\,m$; $\rho_L \sim 1{,}2\,kg/m^3$

$\eta_L \sim 0{,}02\,m\,Pa\,s$

wenn $\upsilon = 5\,m/s \Rightarrow Re = 3 \cdot 10^6 \gg 1 \Rightarrow$ turbulent $\Rightarrow$ Newton-Formel

Fragen nach Endgeschwindigkeit $\upsilon = const.$; $a = 0$



$$\vec{F}_G + \vec{F}_R = m \cdot \vec{a} = 0 = mg - \frac{1}{2} \rho A \cdot c_w \cdot \upsilon^2$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2mg}{\rho c_w \cdot A}}$$

Bsp. $m = 100\,kg = 70\,kg + 30\,kg$ (Fallschirm), $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$

$\Rightarrow \upsilon = 4\,m/s \hat{=} 15\,km/h$

ii) Regentropfen $\upsilon = ?$

zwei Arten $r_1 = 2\,mm$ Regen | $r_2 = 5\,\mu m \approx 10 \times \lambda_{Licht} \Rightarrow$ Nebel ist weiß; Nebel

; $c_{w_{Kugel}} = 0{,}45$, $\rho_L = 1{,}2\,kg/m^3$

$\eta_L = 0{,}02\,m\,Pa\,s$

$\rho_W = 1000\,kg/m^3$

$$F^R_{St} = 6\pi\eta R \cdot \upsilon_{St} = mg = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_W g \Rightarrow \upsilon_{St} = \frac{2}{9}\frac{R^2}{\eta} \cdot \rho_W g$$

$$F^R_N = 0{,}45 \cdot \frac{1}{2}\rho_L \cdot \upsilon_N^2 \cdot \pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho_W \cdot g \Rightarrow \upsilon_N = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{R}{0.45} \cdot \frac{\rho_W}{\rho_L} \cdot g}$$

einsetzen für Regen

$\upsilon_{St} = 440\,m\,s^{-1}$

$\upsilon_N = 10\,m\,s^{-1}$ okay

Nebel

$\upsilon_{St} = 3\,mm\,s^{-1} \hat{=} 10\,m/h$ okay $\hat{=}$ Senkung Morgen-Nebel

$\upsilon_N = 0{,}5\,m\,s^{-1}$

math. Einschub Differentialgleichungen (Integrieren)

was sind das? Funktion und Gleichungen wo Ableitungen auftreten (modellieren)

z. B. $m\ddot{x}(t) = -k\,x(t)$; ; $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overset{\text{Druck}}{p}(x,t) = \frac{1}{\kappa\varrho}\cdot\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$

$\hat{=}$ Schallwellen

keine Dgl. $\ddot{x}(t) + \int_a^b f(\tau,t)\,x(\tau)\,d\tau = 0 \;\hat{=}$ Integrodifferentialgl.

Einteilung: - gewöhnliche Dgl: ges. Funktion nur in 1 Variable vor

z. B. ges $y(x)$; $y'(x) + a x\sqrt{y} = 0$

$\varphi(t)$; $\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell}\sin(\varphi(t)) = 0 \;\hat{=}$ Fadenpendel

- partielle Dgl: ges. Fkt in mehr als 1 Variable

Bsp. $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\kappa\varrho}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$

hier nur gewöhnliche Dgl.

weitere Einteilung: Ordnung der Dgl wird durch höchste Ableitung Bestimmt.

Bsp. $(\dot{u})^2 + 2u = 0$ 1. Ord.

$\ddot{x} + kx = 0$ 2. Ord.

$w_T^{(4)}(x) = \frac{1}{EI}\,q(x) \;\hat{=}$ Balkenbiegung

$\hat{=}$ 4. Ableitung

weiter lineare gewöhnliche Dgl.: ist lin. in gesuchter Fkt und deren Ableitung, alles andere $\hat{=}$ nicht lin.

allg. $\sum_{i=0}^{N} a_i(t)\,x_T^{(i)}(t) = f(t)$ ges. Fkt ist $x(t)$; $a_i(t)$ = Funktion wie auch $f(t)$ in t

Bsp. $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \sin t$ $\hat{=}$ lin.

aber $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \sin x$ $\hat{=}$ nicht lin.

oder $\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0$ $\hat{=}$ –"–

oder $\dot{x}\cdot\ddot{x} + g(t) = 0$ $\hat{=}$ –"–

im Weiteren nur lin. Dgl. 1. und 2. Ord.

1) lin. Dgl. 1. Ord.

$\| y' + y\cdot f(x) = g(x) \|$

noch eine Einteilung

homogen, wenn $g(x) = 0$

inhomogen –"– $g(x) \neq 0$

Bsp. • radioaktiver Zerfall

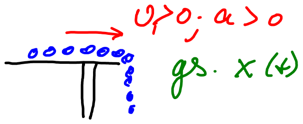
• Geschwindigkeit freier Fall mit oder ohne Reibung

• Spannung an Spule im Gleichstrom/Wechselstrom-Kreis

2. lin. DGl 2. Ord. speziell konst. Koeff.

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$; Bsp. • Federschwinger (nicht Pendel)

• rutschende Kette



• erzwungene Schwingung
$\Rightarrow$ harm. Oszillator

Bsp. 1) lin. Dgl. 1. Ord.

Radioaktiver Zerfall

$n(t) = n$ – Anzahl der zur Zeit t vorhandenen Atomkerne welche nicht zerfallen sind

$dn = -$ ist die in dt zerfallende Zahl an Kernen

$$dn \propto dt$$

$$dn \propto n(t)\ ;\ n(t) \text{ nimmt ab}$$

$$dn(t) = -\lambda\, n(t) \cdot dt$$

$$\frac{dn}{dt} + \lambda n(t) = 0 \quad \text{oder} \quad \dot{n} + \lambda n = 0$$

(Typ $y' + f(x)\, y = g(x)$; $f(x) = \lambda$; $g(x) = 0 \Rightarrow$ homogene Dgl. linear 1. Ord. mit konstanten Koeff.)

Methode zur Lösung: Trennung der Variablen y, x

$$\frac{dn}{dt} = -\lambda\, n(t) \qquad \text{ges. } n(t)$$

$$dn = -\lambda n\, dt$$

$$\underbrace{\frac{dn}{n}}_{\text{kein } t} = \underbrace{-\lambda\, dt}_{\text{kein } n\text{-Enthalten}} \Rightarrow \text{zwei Wege}$$

$$\int_{n_0}^{n} \frac{dn}{n} = -\lambda \int_{t_0=0}^{t} dt$$

Anfangsbed. $n(t=0) = n_0$

$$\left[\ln n\right]_{n_0}^{n(t)} = \left[-\lambda t\right]_0^t$$

$$\ln n - \ln n_0 = -\lambda t$$

$$\ln \frac{n}{n_0} = -\lambda t$$

$$n(t) = n_0 e^{-\lambda t}$$

$$\int \frac{dn}{n} = -\lambda \int dt$$

Integrationskonst.

$$\ln n = -\lambda t + C$$

Konstante

$$n = e^{-\lambda t} \cdot e^{C} \ ; \quad e^{C} = \tilde{C}$$

$$n(t) = \tilde{C} e^{-\lambda t}$$; nun $\tilde{C}$ aus AB $n(t=0) = n_0$

$$n(t=0) = \tilde{C} e^{-\lambda \cdot 0} = \tilde{C} = n_0 \Rightarrow \tilde{C}$$

$$\Rightarrow n(t) = n_0 e^{-\lambda t}$$