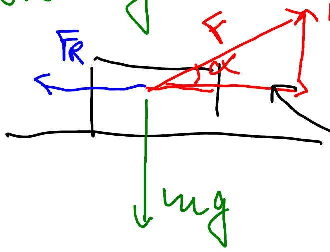
Vorlesung 4.12.2020



Kräftegleichgewicht
horizontal
$F \cdot \cos\alpha - F_R = 0$; $F_R = F_N \cdot \mu$
vertikal, Normalkraft $F_N = m \cdot g - F \sin\alpha$

$\Rightarrow F \cdot \cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) = 0$

$F(\alpha) = \dfrac{\mu m g}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha}$; für welches α ist $F = \min$

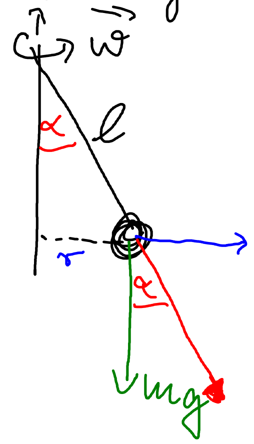
genau dann wenn $\cos\alpha + \mu \sin\alpha = \max$.

$$\frac{d(\cos\alpha + \mu \sin\alpha)}{d\alpha} = 0 = -\sin\alpha + \mu\cos\alpha \Rightarrow \tan\alpha = \mu \quad 0{,}5$$

$$\Rightarrow \alpha_{opt} = 26{,}6^\circ$$

---

21 Drehzahlregler

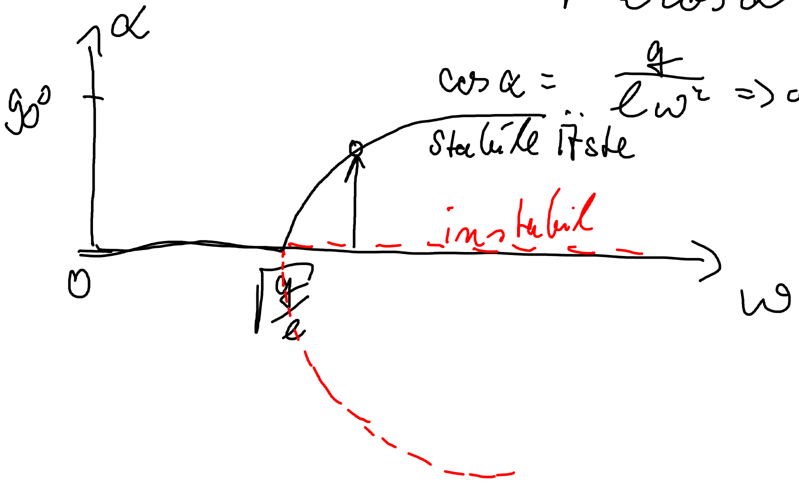


$F_z = \dfrac{m v^2}{r} = m\omega^2 r = m\omega^2 l \cdot \sin\alpha$

$\tan\alpha = \dfrac{|F_z|}{|F_g|} = \dfrac{\cancel{m}\omega^2 l \sin\alpha}{\cancel{m} g}$

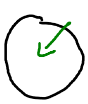
$\Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{g}{l\cos\alpha}}$; wenn $\alpha = 0 \Rightarrow \omega_{min} = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$

$\cos\alpha = \dfrac{g}{l\omega^2} \Rightarrow \alpha = \arccos\dfrac{g}{l\omega^2}$



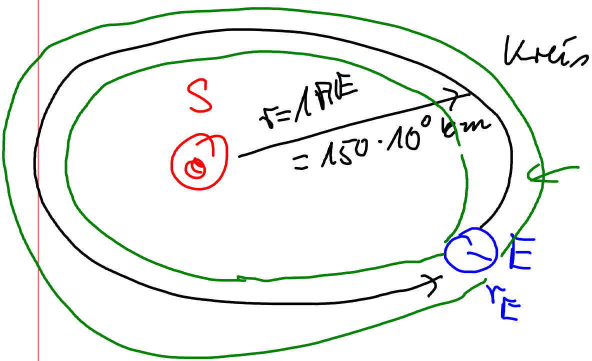
---

22 Staub



$m_1 \cdot g = G \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \Rightarrow m_2 = m_{Erde}$;

$g = G\dfrac{m_2}{r^2}$; $\dfrac{g \cdot r^2}{G} = m_{Erde}$



Aufsammeln ΔV

$\Rightarrow \Delta V_g = \pi \cdot \overbrace{\pi r \cdot 2}^{u}$; mit v_{Erde}

$\Delta V = v \cdot \Delta t \cdot \pi r_E^2$; $v = \frac{2\pi r}{T}$

$\Rightarrow$ Masse pro Zeit $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = \frac{\rho\, 2\pi^2 r\, r_E^2}{T} = 32{,}9\ \frac{t}{d}$ ← pro Tag

Impulserhaltung: $m \cdot v = p$; Impuls Staub $= 0$

$$\cancel{m v} = (m + \Delta m)(v + \Delta v) = \cancel{m v} + m\Delta v + \Delta m\, v + \underbrace{\Delta m \cdot \Delta v}_{\approx 0}$$

davor danach

$$0 = m \cdot \Delta v + \Delta m \cdot v$$

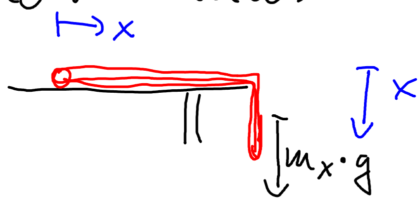
$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{v}{m}\cdot\frac{\Delta m}{\Delta t} = -\frac{v_E}{m_E}\cdot\frac{\Delta m}{\Delta t} = -1{,}9\cdot 10^{-21}\ \frac{m}{s^2} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

auch $\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta T}{T} = 2.0 \cdot 10^{-18}$ Änderung der Jahresdauer pro Jahr

wenn $T = 4.5\cdot 10^9 \Rightarrow \Delta T = 2\cdot 10^{-18} \cdot 4.5\cdot 10^9 \lll 1a$

---

23 rutschendes Seil



$m \cdot \ddot x = m_x \cdot g$; m_x = Anteil der Masse zur Beschleunigung

$m \ddot x = \frac{m \cdot g}{l} \cdot x$; l – Länge Seil ≙ Dgl. 2. Ord., homogen

$$\ddot x - \frac{g}{l} x = 0$$

Ansatz $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$

$\dot x(t) = x_0 \lambda e^{\lambda t}$

$\ddot x(t) = x_0 \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$\cancel{x_0}\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} - \frac{g}{l}\cancel{x_0 e^{\lambda t}} = 0$$

$\Rightarrow \lambda^2 - \frac{g}{\ell} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{g}{\ell}}$

$\Rightarrow x(t) = A\, e^{\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t} + B\, e^{-\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t}$; A & B aus Anfangsbed.

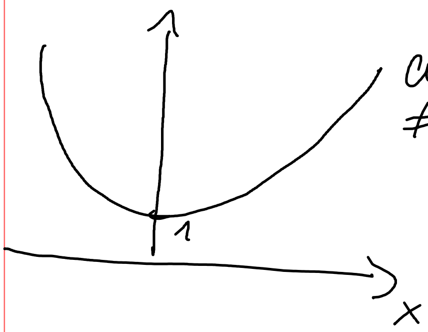
$x(0) = x_0 \neq 0$; $\dot{x}(0) = v_0 = 0$

$x_0 = A + B$

$\dot{x}(0) = A\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, e^{\sqrt{\;}\cdot 0} - B\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, e^{\sqrt{\;}\cdot 0} = 0 = A - B \Rightarrow A = B$

$\Rightarrow A = B = \frac{x_0}{2}$

$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} x_0 \left(e^{\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t}\right) = x_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t\right)$



cosh x
≠ Parabel

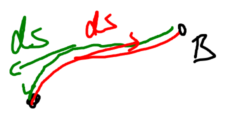
≙ Kettenlinie, frei hängende Kette genau die Form annimmt.

$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

Vorlesungsstoff – Wegintegrale für Arbeit

Weg $A \rightarrow B \rightarrow A$ (vor, zurück) ≙ W_{AB} & W_{BA} ≙ $\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s}$ & $\int_B^A \vec{F}\cdot d\vec{s}$

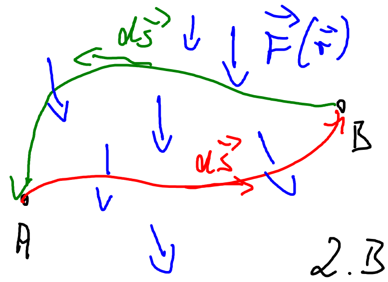
a)



selber Weg von A nach B wie B nach A

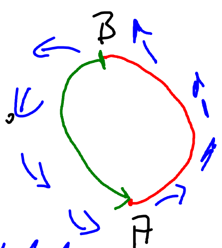
$d\vec{s} = -d\vec{s} \Rightarrow W_{AB} = -W_{BA} \Rightarrow W_{AB} + W_{BA} = 0$ wenn $\vec{F}$ gleich bleibt

b)



Verschiedene Wege, dann nicht immer $W_{AB} = -W_{BA}$

z.B.



$W_{AB} > 0$ da $\vec{F} \uparrow\uparrow d\vec{s}$

$W_{BA} > 0$ da $\vec{F} \uparrow\uparrow d\vec{s}$

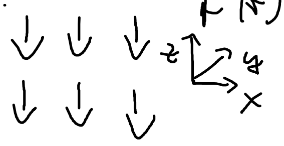
$\Rightarrow W_{AB} \neq -W_{BA}$

Wirbelfeld — dieses Kraftfeld kann Arbeit verrichten.

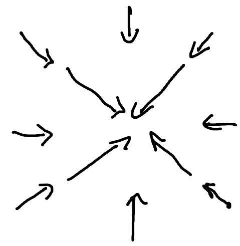
Def: Wenn Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ so, dass immer gilt $W_{AB} = -W_{BA}$ für alle Wege, dann Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ = konservativ

Bem: i) Wir rechnen fast immer mit solchen Kraftfeldern

Bsp.

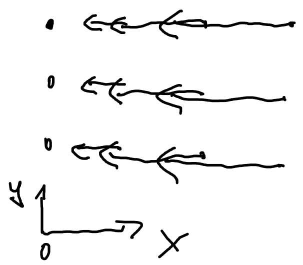
a) 

$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_z \end{pmatrix}$

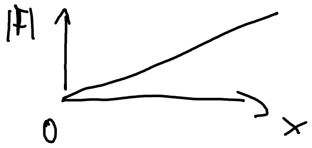
b) 

$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_r$

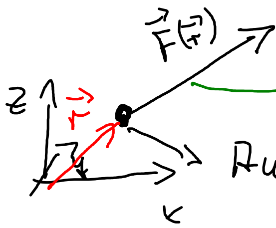
Gravitation

c) 

$\vec{F} = -kx\vec{e}_x \hat{=}$ Feder



Bem ii) Vektorpfeile zeichnen



nicht dort

Aufpunkt $\hat{=}$ Vektorpfeiles

Bem: iii) Wir prüfen ob $\vec{F}(\vec{r})$ = konservativ ohne alle Wege zu probieren durch $\text{rot}\,\vec{F}(\vec{r}) \equiv 0 \quad \forall \vec{r}$

rot = math. Operator $\hat{=}$ $\underbrace{\vec{\nabla}}_{\text{Nabla}} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \vec{F}(\vec{r})$

$$= \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \\ e_x & e_y & e_z \end{vmatrix}$$

Ableitung nach

Komponenten von $\vec{F}$

Bsp. a) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_z \end{pmatrix}$; $\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & -F_z \\ e_x & e_y & e_z \end{vmatrix} = -\partial_y F_z e_x + \partial_x F_z e_y + 0$

Zahl

Zahl

$= \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{F}(r)$ = konservativ

b) $\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \leftarrow \vec{e}_r = -G m_1 m_2 \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \\ \frac{z}{\sqrt{\dots}^3} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow F_x \\ \leftarrow F_y \\ \leftarrow F_z \end{matrix}$

$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{\quad}} \\ \frac{z}{\sqrt{\quad}} \end{pmatrix}$

Für rot $\vec{F}$; z.B. für e_x, also $\underbrace{(\text{rot } F)_x}_{\text{komp.}} = \partial_y \frac{z}{(x^2\dots)^{3/2}} - \partial_z \frac{y}{(x^2+\dots)^{3/2}}$

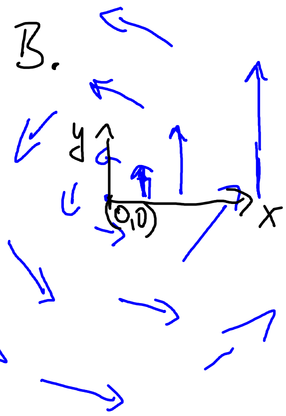
$$= -\frac{3}{2}\frac{2yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{3}{2}\frac{2zy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0$$

analog durch Ausrechnen $(\text{rot } F)_y = (\text{rot } F)_z = 0$

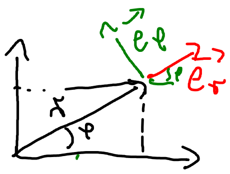
$\Rightarrow \text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ ✓

c) $\vec{F} = \begin{pmatrix} -kx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -kx & 0 & 0 \\ e_x & e_y & e_z \end{vmatrix} = -\partial_z(kx)e_x + \partial_y(kx)e_z = \vec{0}$

aber z.B.

d) 

$\vec{F} = r\,\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow F_x \\ \leftarrow F_y \\ \end{matrix}$



$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$

$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

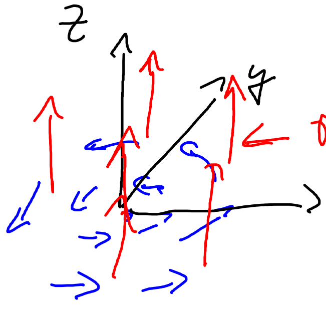
$= \begin{pmatrix} -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \quad |\vec{r}| = r$

$= \begin{pmatrix} -\frac{y}{r} \\ \frac{x}{r} \end{pmatrix}$

Wollen sehen ob rot $\vec{F} = 0$?

$$\operatorname{rot}\vec F(\vec r) = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y & x & 0 \\ e_x & e_y & e_z \end{vmatrix} = (\underbrace{\partial_y 0 - \partial_z x}_{0})e_x + (\underbrace{+\partial_z y - \partial_y 0}_{0})e_y + (\underbrace{\partial_x x + \partial_y y}_{2})e_z$$

$$= 2\vec e_z$$



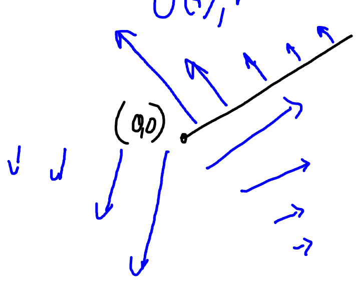
← $\operatorname{rot}\vec F = 2e_z$ $\forall (x,y)$ nicht nur am $(0,0)$!!

auch dort $\operatorname{rot} F(z) \neq 0$

daher heißt dieses $\vec\nabla \times \ldots = \operatorname{rot}$ und d.h. ≙ Rotation im engl. auch rot als Symbol, aber spricht von curl

noch ein Hinweis, dies ist das $\vec v$ einer rotierenden Scheibe

e) nun $\vec v = \frac{c}{r}\vec e_\varphi$; c - Konstante $\quad e_\varphi = \begin{pmatrix} -\frac{y}{r} \\ \frac{x}{r} \end{pmatrix}$



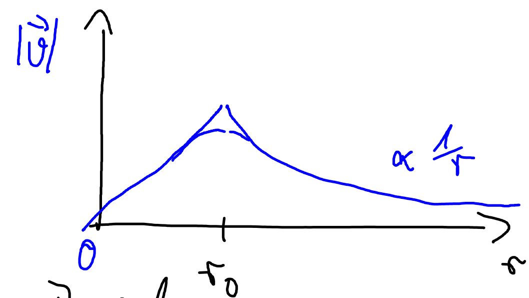
nimmt nach außen ab

$$\vec v = c\begin{pmatrix} -\frac{y}{r^2} \\ \frac{x}{r^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{(x^2+y^2)} \\ \frac{x}{(x^2+y^2)} \end{pmatrix}$$

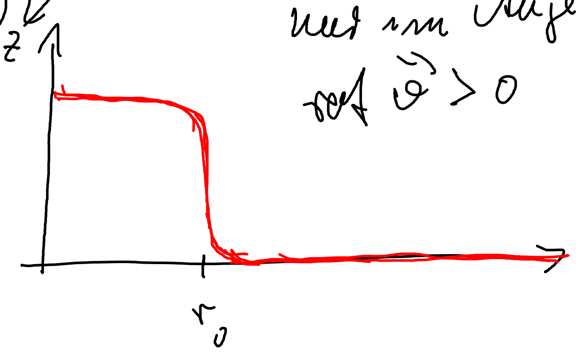
Hausaufgabe, zeige $\operatorname{rot}\vec v = \vec 0$

dies entspricht dem v-Feld/Kraftfeld von Wirbelstürmen

reale Wirbelstürme



$\Rightarrow$



nur im Auge ist $\operatorname{rot}\vec v > 0$

Bem. zu rot

i) $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$, auch $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$

3 Funktion in (x, y, z)

$= \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z = \mathrm{div}\,\vec{F}$

$\hat{=}$ Divergenz $\hat{=}$ Zahl

auch sinnvolle Komb.

ii) $\mathrm{rot}\,\vec{F}$ ergibt immer einen Vektor

iii) $\vec{\nabla} u(x, y, z) = \vec{\nabla} u(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \\ \partial_z u \end{pmatrix} = \mathrm{grad}\, u \,\hat{=}$ Gradient

skalares Feld, eine Fkt von (x, y, z)

Vektor

iv) $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \Delta \leftarrow$ Laplace ; $\Delta = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} = \partial_{x,x} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$

zweiten Ableitungen

v) $\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Box$ - Quabla, Wellengleichung

Operator

vi) hier nur $\vec{\nabla}$ in kartesischen Koordinaten verwendet $\hat{=} x, y, z$

auch in Zylinder und Kugelkoor. (r, θ, φ) möglich

Kugelkoor. $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (F_\varphi \sin\theta) \right. \ldots$ siehe Bücher

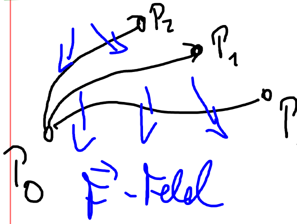
analog in Zylinderkoor.

auch ! $\mathrm{grad} \,\hat{=}\, \nabla \neq \partial_r$, es kommt auch θ und φ-Komp.

aber in Beispielen oft keine θ, φ Abhängigkeit

z. B. Gravitation $\vec{F}(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -G \frac{m_1 m_2}{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. Potentielle Energie



$$W(P_0 \to P_i) = \int_{P_0}^{P_i} \vec F(\vec r)\cdot d\vec s \overset{!}{=} -\Delta E_{pot} = -\left(E_{pot}(P_i) - E_{pot}(P_0)\right)$$

≙ zu verrichtende Arbeit

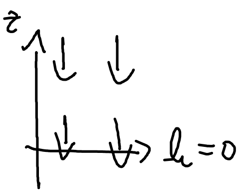
also $\Delta E_{pot} = -\int F\, ds$

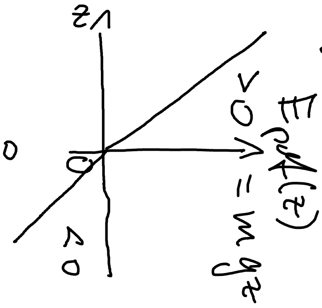
i) Dies macht nur Sinn, wenn $\vec F$ = konservativ ist.

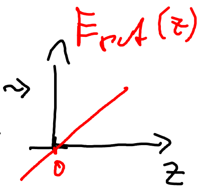
ii) Wahl von P_0 für alle P_i unwichtig, da nur Differenzen zwischen $E_{pot}(P_i)$ betrachtet werden.

oft i) $P_0 = 0$; z.B. $\vec F = -mg\,\vec e_z$;

$E(P_0) = 0$

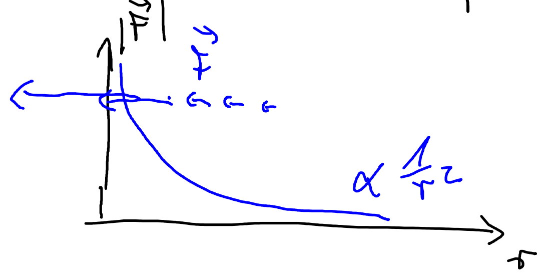






oder $E_{pot}(r)$ mit $E_{pot}(\infty) = 0$

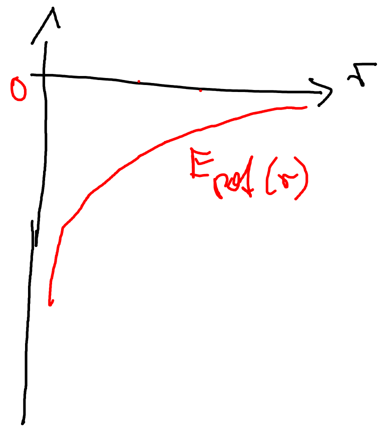
z.B. $\vec F = -G\frac{mM}{r^2}\vec e_r$; $\vec F(\vec r) = \vec F(|\vec r|) = F(r)$



$$-E_{pot}(\infty) + E_{pot}(r) = \int_r^\infty \vec F(\vec r)\cdot d\vec r = -\int_r^\infty G\frac{mM}{r^2}\,dr$$

$$\vec F\cdot d\vec r = |F|\,|dr|\cdot\cos\angle$$

$\xrightarrow{d\vec r}$ $\xleftarrow[F]{}$ $\Rightarrow \angle = 180° \Rightarrow \vec F\cdot d\vec r = -|F|\cdot dr$



$$\Rightarrow E_{pot}(r) = \left[G\frac{mM}{r}\right]_r^\infty = -G\frac{mM}{r} = m\,\Phi(r)$$

Potenzial

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}$$

E_{pot} ≙ potentiellen Energie hängt von m ab | Φ ≙ Potenzial, ohne m