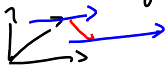
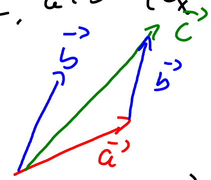
Vorlesung 06.11.20

Wiederholung: Vektoren, Ortsvektor, Verschiebungsvektor



Vektoren Addition, $\vec{a}+\vec{b} = (a_x+b_x)\vec{e}_x + (a_y+b_y)\vec{e}_y + (a_z+b_z)\vec{e}_z$



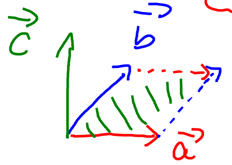
Subtraktion $\vec{a}-\vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$

Multiplikation: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, z.B. $W = \vec{F}\cdot\vec{s}$

$= |\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$

$W = \oint \vec{F}\cdot d\vec{s}$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ e_x & e_y & e_z \end{vmatrix} \begin{matrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \\ e_x & e_y \end{matrix} = \vec{c}$$



$\vec{c} \perp \vec{a}$; $\vec{c} \perp \vec{b}$

$|\vec{c}| \hat{=}$ Fläche zw. $\vec{a}, \vec{b}$

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\cdot\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$; Physik: $\vec{T} = \vec{r}\times\vec{F}$

2. Koordinatensysteme

Skalare $\hat{=}$ Tensoren 0. Stufe $\hat{=}$ Zahlen, Druck, Temperatur, Dichte (als Fkt. des Orts)

Vektoren $\hat{=}$ Tensoren 1. Stufe $\hat{=}$ 3 Zahlen, Kraft, elekt. Feld, Geschwindigkeit, ...

(Tensoren 2. Stufe $3^2 = 9$ Zahlen, Tensoren n-Stufe enth. 3^n Zahlen)

Trägheitstensor

Koordinatensysteme (KS) $\overset{\text{hier}}{=}$ ortho-normierte KS

$\vec{e}_x \perp \vec{e}_y$; ... $|\vec{e}_y| = |\vec{e}_x| = |\vec{e}_z| = 1$

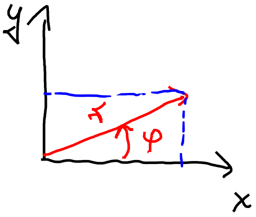
speziell: kartesisches KS (y, x)

andere: Polarkoor. $(\vec{e}_\varphi, \vec{e}_r)$ in 2D

Zylinderkoor. $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$

Kugelkoor. $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\vartheta)$ → ϑ-theta } in 3D

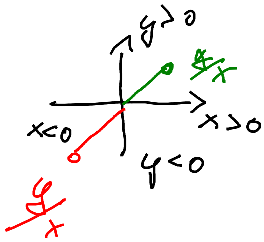
Polarkoor.



$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

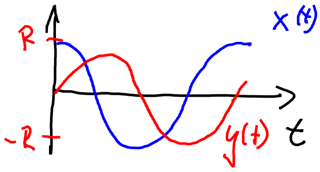
$\tan\varphi = \frac{y}{x}$

$\varphi = \arctan(x,y)$
↑
mit VZ



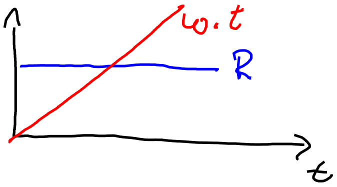
$R, \omega = \text{const.}$

Bsp. $\vec r = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cdot\cos\omega t \\ R\cdot\sin\omega t \end{pmatrix}$

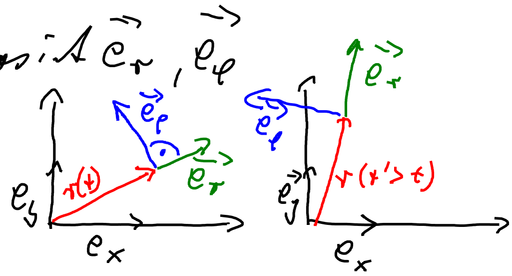


↓

$\vec r = \begin{pmatrix} R\vec e_r \\ \omega t\,\vec e_\varphi \end{pmatrix}$;

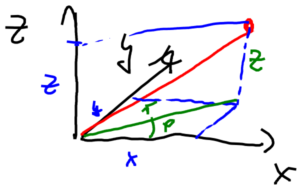


wo sind $\vec e_r$, $\vec e_\varphi$



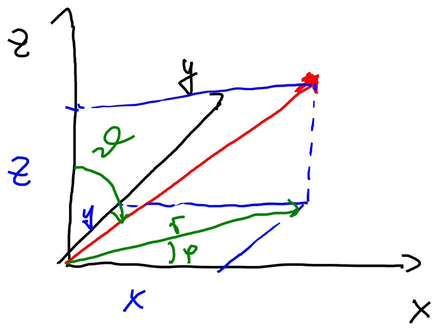
Einheitsvektoren bewegen sich
⇒ Achtung bei Zeitableitungen
$\frac{d}{dt}\vec e_r \neq 0$; $\frac{d}{dt}\vec e_\varphi \neq 0$ später

Zylinderkoor. ≙ 3D



$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$z = z$

Kugelkoor., wichtig für symmetrische Probleme in 3D



$x = r\cos\varphi\cdot\sin\vartheta$
$y = r\sin\varphi\cdot\sin\vartheta$
$z = r\cos\vartheta$

3. Geschwindigkeit & Beschleunigung in 3D

math. Einschub: Ableiten ≙ Operation mit Funktion; Funkt ⇒ Funkt.
(Funktion ≙ Zahl ⇒ Zahl)

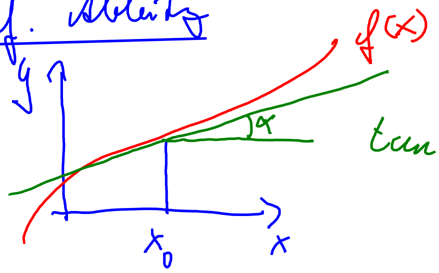
Differentialoperator	Funktion
$f(x) \to g(x)$	$f(x) = y \Rightarrow x \xrightarrow{f} y$
Bsp. $f(x) = x^2$; $f'(x) = g(x) = 2x$	Bsp. $f(x) = x^2$; $3 \xrightarrow{f} 9$
$x^2 \xrightarrow{\frac{d}{dx}} 2x$	

höhere Ableitungen

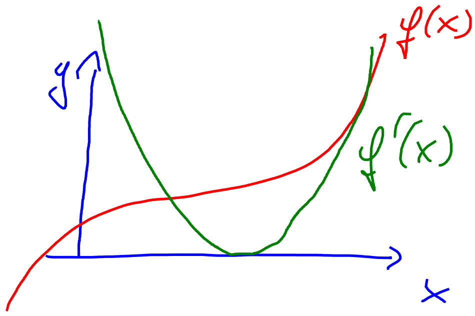
$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} f(x)\right) = \frac{d^2}{dx} f(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}\,; \quad \text{Bsp. (Weg)} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} s(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{s}(t)\right) = \ddot{s}(t)$$

für $\frac{d}{dt}$

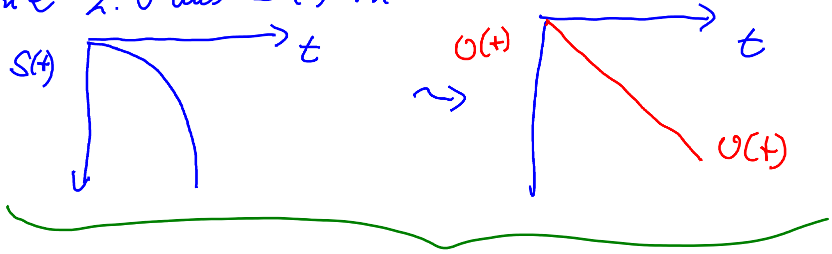
Def. Ableitung



$$\tan\alpha = f'(x)\Big|_{x_0} = f'(x_0)$$



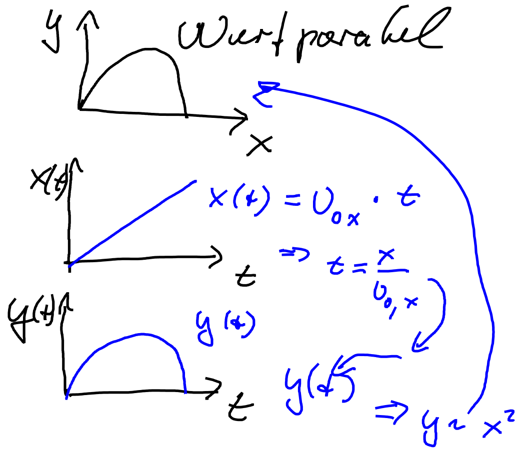
Physik z.B. v aus s(t) in 1D



oft ins selbe Diagramm, aber unterschiedliche Einheiten $[s] = m$

$[v] = m/s$

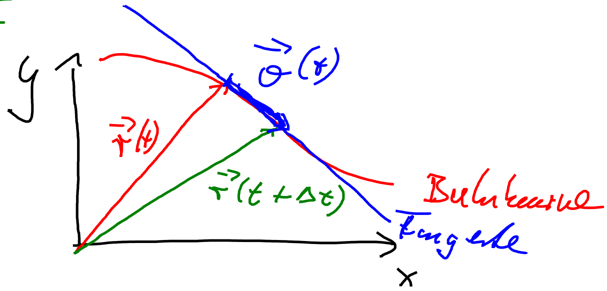
nicht verwechseln mit Bew. in 2D



3.1. Ableiten von Vektoren ⇒ Geschwindigkeit

Ortsvektoren

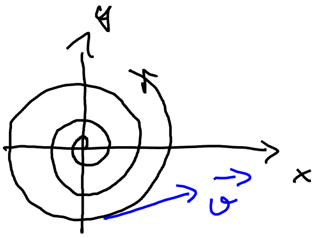
Def.: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$

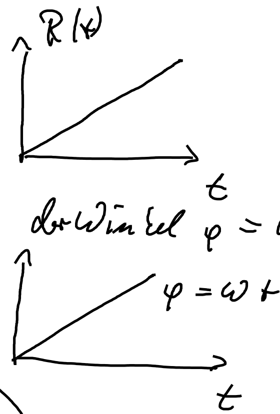


tangentiale Geschwindigkeit

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Bsp. Archimedische Spirale





$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R(t)\cdot\cos\omega t \\ R(t)\cdot\sin\omega t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad R(t) = v_R \cdot t$$

der Winkel $\varphi = \omega t$

$$= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix};$$

$$\frac{d}{dt}\cos\omega t = -\omega\sin\omega t$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{R}(t)\cos\omega t - R(t)\cdot\omega\sin\omega t \\ \dot{R}(t)\sin\omega t + R(t)\cdot\omega\cdot\cos\omega t \end{pmatrix};$$

speziell $\dot{R}(t) = v_R$ & $z(t) = 0$

$$|\vec{v}| = \sqrt{[v_R \cos\omega t - v_R t\omega \sin\omega t]^2 + [v_R \sin\omega t + v_R t\omega \cos\omega t]^2}$$ mit $v_R t = R(t)$, $v_R = \dot{R}(t)$

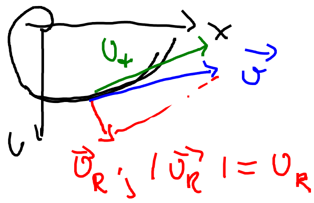
$v_R^2\cos^2\omega t + v_R^2 \sin^2\omega t = v_R^2$

analog $v_R^2 t^2 \omega^2$

andere Mischterme heben sich auf

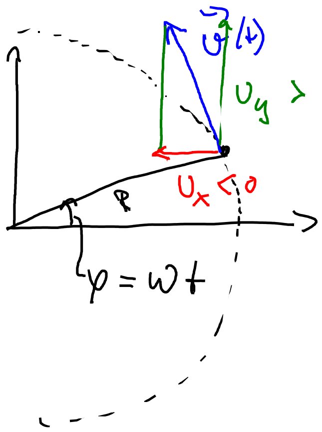
$|\vec{v}| = \sqrt{v_R^2 + v_R^2 t^2 \omega^2}$; $v_R \hat{=}$ Radialgeschwindigkeit

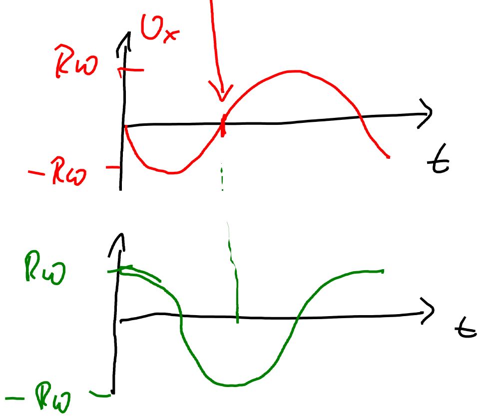
$v_R \cdot t \cdot \omega \hat{=}$ tangentialgeschwindigkeit $= v_t$



Spezialfall Kreisbahn $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \end{pmatrix}$; $R = $ const. ; $\omega = $ const.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -R\omega\sin\omega t \\ R\omega\cos\omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \vec{v}(t)$$





$[R\omega] = [R][\omega] = m \cdot s^{-1}$

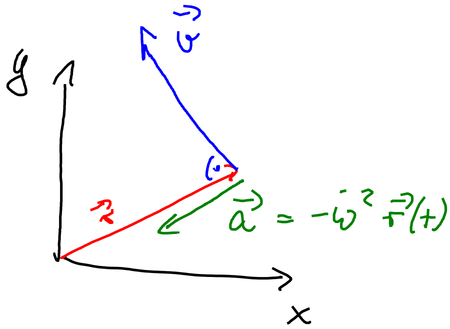
$\omega = 2\pi f$; $f = \frac{1}{T_P}$ (Periodendauer)

Beschleunigung: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t)$

spezielle Kreisbahn: $R = $ const, $\omega = $ const.

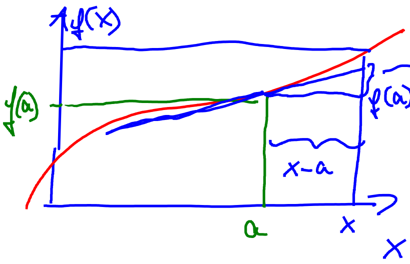
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -R\omega^2\cos\omega t \\ -R\omega^2\sin\omega t \end{pmatrix} = -\omega^2\vec{r}(t)$$

$=$ Radialbeschleunigung



$\Rightarrow$ Bewegung auf Kreisbahn ist beschleunigte Bewegung mit $\vec{a}$ nach innen.

math. Einschub Taylor-Entwicklung



Def: $f^{(0)}(x)|_{x=a}$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(x)}{1!}\Big|_{x=a}\cdot(x-a)^1 + \frac{f''(x)}{2!}\Big|_{x=a}\cdot(x-a)^2 + \dots$$

beliebige Fkt. Zahl Zahl · lin x Zahl · quadr. in x

$0! = 1;\ 1! = 1;\ 2! = 2\cdot 1;\ \dots$

$\sin x, \cos x \dots = \text{Zahl} + \text{Zahl}\cdot(x-a) + \text{Zahl}\cdot(x-a)^2 \dots$

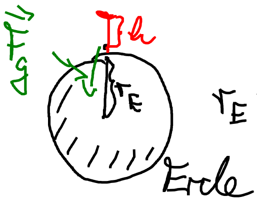
≙ Anpassung einer Funktion durch ein Polynom

Bem. so rechnet Euer Taschenrechner sin x, cos x, ln x u.s.w. aus

Physik: was passiert in Umgebung von $x = a$

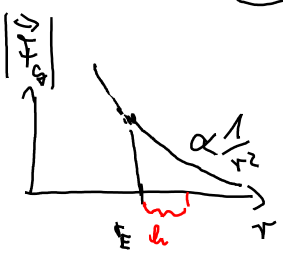
Bsp. Gravitationsgesetz $F(r) = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$

m_1 = ich
m_2 = Masse der Erde
γ = Gravitationskonst.



$r_E \sim 6000$ km

Frage, wie ändert sich Gravitation (Anziehung), wenn ich von Erdoberfläche nach oben gehe?



nun $a = r_E$; $h = r - a$

$$\frac{d}{dr}\left(\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}\right)\Big|_{r=r_E}$$

$$F(h) = \gamma\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{r_E^2} - 2\,\frac{\gamma m_1 m_2}{r_E^3}\cdot\underbrace{(r-a)}_{h} + \dots$$

$$F(h) = \underbrace{\gamma\cdot\frac{m_2}{r_E^2}}_{g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}}\cdot m_1 - 2\gamma\,\frac{m_1 m_2}{r_E^3}\cdot h + \dots$$

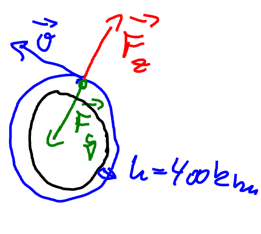
$$F(h) = m_1\cdot g - \frac{2}{r_E}\, g\, m_1\cdot h + \dots$$

$$F(h) = m_1 \underbrace{g\left(1 - 2\,\frac{h}{r_E}\right)} + \dots$$

Abnahme von g mit der Höhe h.

Bem. ISS ≙ $h \approx 400$ km
$r_E = 6370$ km ⇒ $g_{ISS} \sim g_{Erdoberfläche}$

⇒ auf ISS selbe Schwerkraft wie auf Erde aber durch Zentrifugalkraft kompensiert



3.2 Bewegungsformen (spezielle)

3.2.1 gleichförmig beschleunigte Bewegung $\hat{=}\ \ddot{\vec r} = \dot{\vec v} = \vec a = \text{const.}$

"immer komponentenweise und kartesisches KS!"

$\dot{\vec v} = \vec a \quad \Big| \int \leftarrow$ Integraloperator

Integrationskonst.

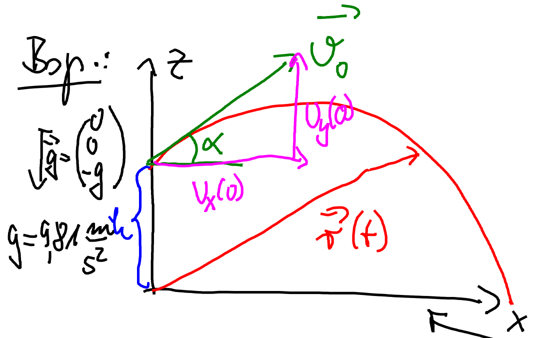
$$v(t) = \int \vec a \, dt = \begin{pmatrix} \int a_x(t)\,dt \\ \int a_y(t)\,dt \\ \int a_z(t)\,dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \cdot t + v_x(0) \\ a_y \cdot t + v_y(0) \\ a_z t + v_z(0) \end{pmatrix}$$

analog:

$$\vec r(t) = \int \vec v(t)\,dt = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_x t + v_x(0)\cdot t + x_0 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}; \quad v_x(0), v_y(0), v_z(0); \quad x_0, y_0, z_0$$

$\hat{=}$ Anfangsbedingungen

Bsp.:

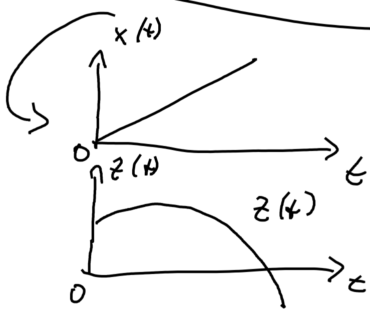


$$\text{AB: } \vec r(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}; \quad \vec v(0) = \begin{pmatrix} v_x(0) \\ 0 \\ v_z(0) \end{pmatrix}; \quad \vec a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$\vec r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(0)\cdot t \\ 0 \\ -\frac{g}{2} t^2 + v_z(0)\cdot t + h \end{pmatrix}$$

$v_x(0) = v_0 \cdot \cos\alpha$

$v_y(0) = v_0 \cdot \sin\alpha$



Zeigen dass $z(x)$ auch Parabel

$x(t) = v_x(0)\cdot t \Rightarrow t = \frac{x(t)}{v_x(0)}$

in $z(t) = z(x)$

$$z(x) = -\frac{g}{2}\left(\frac{x^2}{v_{x0}^2}\right) + \frac{v_z(0)}{v_x(0)}\cdot x + h$$

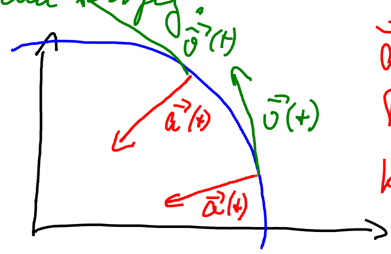
$$z(x) = c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x + c_3$$

$\hat{=}$ Parabel

3.2.2 Bewegung bei nicht. konst. Beschleunigung

a) gleichförmige Kreisbewegung

$\uparrow$
$\varphi = \omega \cdot t$



$\vec a$, $\vec v$ ändern Richtung $\Rightarrow$ nicht konst.

$$\vec v = |\vec v|\, \vec e_t = \omega R \cdot \vec e_t$$

$e_t \leftarrow$ tangential

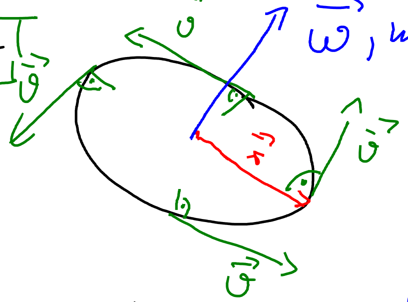
$$\vec a = -R\omega^2 \cdot \vec e_r$$

$\vec r(t) = \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t\end{pmatrix}$; $\vec v = \begin{pmatrix}-R\omega\sin\omega t\\ R\omega\cos\omega t\end{pmatrix}$; $\vec a = \begin{pmatrix}-R\omega^2\cos\omega t\\ -R\omega^2 \sin\omega t\end{pmatrix}$

Zeigen: $\vec r \perp \vec v$; $\vec r\cdot\vec v = R\cos\omega t\cdot(-R\omega\sin\omega t) + R\sin\omega t\cdot R\omega\cos\omega t = 0 \Rightarrow \vec r\perp\vec v$

$\vec a \uparrow\downarrow \vec r$ antiparallel, offensichtlich aus $\vec a = -R\omega^2 \vec r$

sinnvoll $\boxed{\text{Def.: } \vec\omega \text{ als Vektor}}$



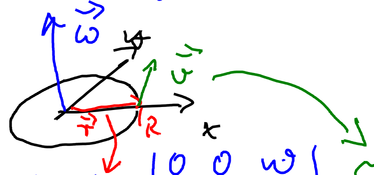
$\vec\omega$, mit $|\vec\omega| = \omega$

$\vec\omega \perp$ auf Drehebene

z.B. wenn in x,y die Bewegung $\Rightarrow \vec\omega = \begin{pmatrix}0\\0\\\omega_z\end{pmatrix}$

dann $\vec v = \vec\omega\times\vec r$

und $\vec a = \vec\omega\times\vec v = \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)$



$\vec\omega\times\vec r = \begin{vmatrix}0&0&\omega\\R&0&0\\e_x&e_y&e_z\end{vmatrix} = R\omega\vec e_y$

! $\vec r\times\vec\omega = -\vec\omega\times\vec r$

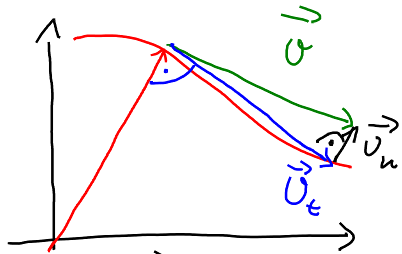
b) allg. krummlinige Bew.

$\vec r(t)$ – Bahnkurve

$\vec v(t)$ aus $\vec v_n$ – normalen Geschwindigkeit

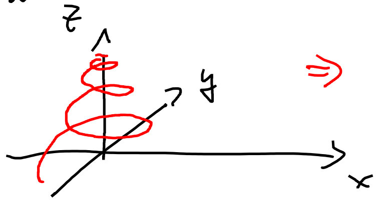
& $\vec v_t$ – tangentiale Geschwindigkeit

analog $\vec a(t)$ aus $\vec a_n$ & $\vec a_t$



analog $\vec a$.

z.B. Bahn



$\Rightarrow \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec v(t) \rightsquigarrow \vec a(t)$

$\Downarrow$ $|\vec v|$, $\Downarrow$ $|\vec a|$

4. Kräfte ≙ Dynamik

Anfänge: Kepler, Galilei, Hooke

Finale: Newton 1686, Principia ...

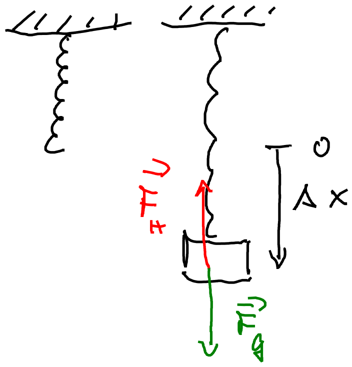
Bem.: kin. Energie $E_{kin} = T = \frac{m}{2}v^2$, erst 1750 durch Emilie du Châtelet

Newton dachte noch $E_{kin} \propto v$ (ohne ²)

4.1 Def. Kraft

Einheit $[F] = N = \frac{kg\, m}{s^2} \hat{=}$ Masse · Beschleunigung

Messen z.B. Hooke's Gesetz



$\vec{F} = -k \cdot \Delta x\, \vec{e}_x$

↑ Rückstellend

Newtonsche Gesetze:

a) $\sum \vec{F}_i = 0$ $(\sum \vec{F} = 0)$ dann Ruhe oder gleichförmig

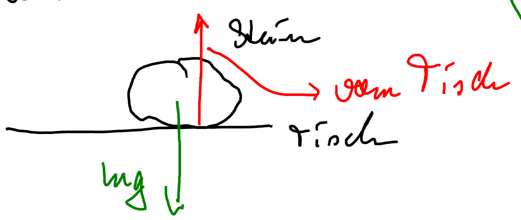
$\vec{v} = 0$ $\quad$ $\vec{v} = $ const.

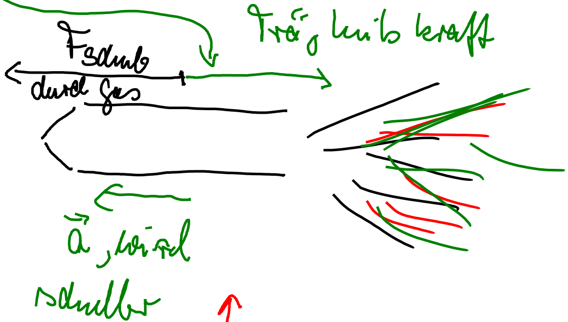
b) $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ wenn $m = $ const. besser $\boxed{\vec{F} = \frac{d}{dt}(\underbrace{m \cdot \vec{v}}_{\text{Impuls}})}$ $\quad \vec{p} = m \cdot \vec{v}$ auch wenn $m(t)$, z.B. Rakete

Trägheitskraft ≙ Scheinkraft im Gegensatz zur Gravitation (echte Kraft)

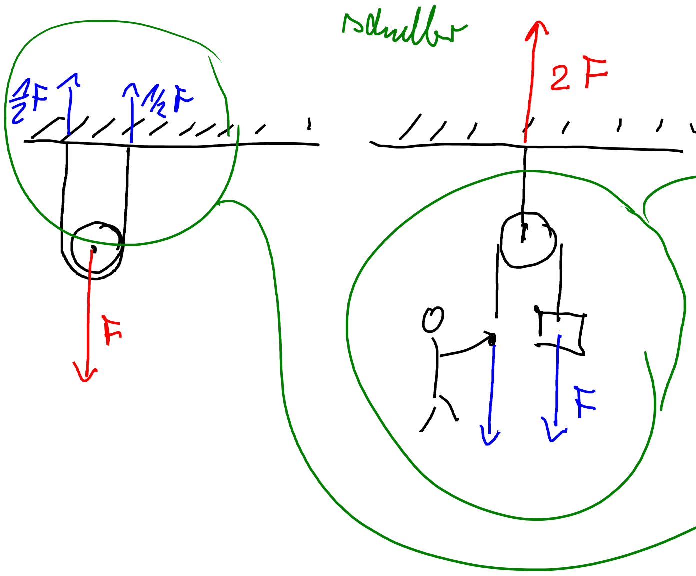
immer der Beschleunigung entgegen

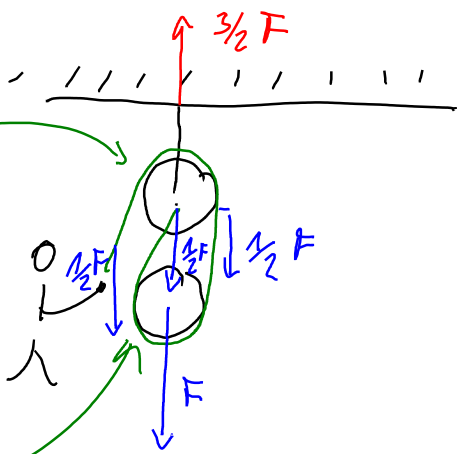
c) „actio = reactio"



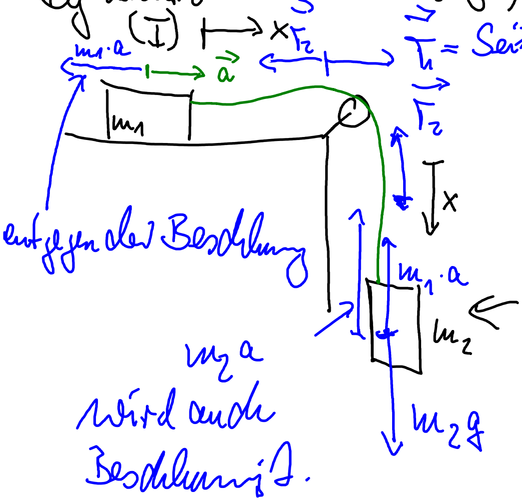


Bsp. Statik Seilrollen





Dynamik $\hat{=}$ mit Bewegung, mit Beschleunigung a



$\vec{T}_1$ = Seilspannung $\quad |\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$

$$\left.\begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad T - m_1 \cdot a = 0 \\ &(\mathrm{II}) \quad -T + m_2 g - m_2 \cdot a = 0 \end{aligned}\right\} \text{2 Gl. in } a, T \text{ ges. } a$$

$$(\mathrm{I}+\mathrm{II}) \quad m_2 g - (m_1 + m_2) a = 0$$

$$a = \frac{m_2 \cdot g}{m_1 + m_2} \quad \checkmark$$

check
$m_1 = 0$
$\Rightarrow a = g$ okay