Universität des Saarlandes
LV-Nr.: 149535 (SS24)
Dozent: Dr. habil. Philipp Hövel

7. Juli 2024

Übungsblatt 5 – Nichtlineare Dynamik und Strukturbildung

Abgabe: Mittwoch, 10.07.2024, 10:00 (vor der Übung oder via Moodle)

Name: ....
Matrikelnummer: ....

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte den Code ebenfalls einreichen.
Einzelabgabe als Ausdruck oder digital via Moodle.

Aufgabe 9 (12 Punkte): *Benjamin-Feir-Instabilität*
Die komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung ist gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial t}W(x,t) = W(x,t) - (1+ic_2)|W(x,t)|^2 W(x,t) + (1+ic_1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(x,t).$$

Untersuchen Sie die Stabilität der homogenen Lösung. Betrachten Sie dazu zunächst eine ebene Welle $W(x,t) = a_Q \exp[i(\omega_Q t + Qx)]$.

1. Leiten Sie einen Zusammenhang zwischen a_Q und Q her?
2. Leiten Sie die Dispersionsrelation, d.h., einen Zusammenhang zwischen ω_Q und Q, her.
3. Betrachten Sie nun die homogene Lösung, d.h. $Q = 0$. Linearisieren Sie die Gleichung um eine kleine Störung $u(x,t)$, d.h.,

$$W(x,t) \approx [1 + u(x,t)]e^{i\omega_0 t},$$

   durch Einsetzen und Vernachlässigen von quadratischen und höheren Termen. Leiten Sie eine Gleichung für $u(x,t)$ und das komplex komjugierte $u^*(x,t)$ her.
4. Zeigen Sie, dass für die räumlichen Fourier-Moden $u_q(t)$ und $u_q^*(t)$ von $u(x,t)$ bzw. $u^*(x,t)$ gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_q(t) = -(1+ic_2)[u_q(t) + u_q^*(t)] - (1+ic_1)q^2 u_q(t).$$

5. Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem der Form $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{A}\mathbf{s}$ mit $\mathbf{s} = (u_q(t), u_q^*(t))^T$.
6. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$.
7. Wie lautet eine Bedingung dafür, dass $\mathbf{A}$ Eigenwerte mit positivem Realteil hat?

Aufgabe 10 (8 Punkte): *FitzHugh-Nagumo-System*
Betrachten Sie FitzHugh-Nagumo-System

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{u} &= u - \frac{u^3}{3} - v \\ \dot{v} &= u + a. \end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie den Fixpunkt des Systems. Gibt es mehr als einen Fixpunkt? Was wäre, wenn die 2. Gleichung noch einen weiteren Term der Form $-bv$ hätte?
2. Untersuchen Sie die Stabilität des Fixpunkts in Abhängigkeit von a.
3. Lösen Sie die Gleichung numerisch für $\varepsilon = 0.005$ und plotten Sie Bespiele von Trajektorien oberhalb und unterhalb des Bifurkationspunktes.
4. Recherchieren Sie, welche Lösung sich ergibt, wenn ein Diffusionsterm in die Aktivator-Gleichung hinzugefügt wird:

   $$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} &= u - \frac{u^3}{3} - v + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= u + a. \end{aligned}$$

   Geben Sie die Quelle(n) an, auf die Sie sich beziehen.