Probeklausur
Theoretische Physik Ia – Rechenmethoden der Mechanik

Dr. habil. Philipp Hövel, Katharina Scherer, Noora Aho, Joshua Weißenfels, Max Lauer

WS 2024/2025 **ursprünglich: Klausur 1 im WS 19/20**

Regeln:

1. Außer Schreibutensilien sowie einem beidseitig handbeschriebenen DIN-A4-Blatt sind keine Hilfsmittel zugelassen. Verwenden Sie dokumentenechtes Schreibwerkzeug (kein Bleistift!).
2. Bitte verwenden Sie für **jede** Aufgabe eine neue Seite. Beschriften Sie jeden Bogen mit Namen und Matrikelnummer. Anmerkungen, Rechnungen, etc. auf den Aufgabenblättern werden nicht gewertet.
3. Die Bearbeitungszeit beträgt **180** Minuten.
4. Bitte die bearbeiteten Aufgaben in der Tabelle ankreuzen!
5. Insgesamt können 90 Punkte erreicht werden.

Nachname:

Vorname:

Matrikelnr:

Studiengang:

Fachsemester:

Geburtsdatum:

Aufgabe	**bearbeitet**	**Punkte**	**möglich**	**Korrektor**
1			10	
2			10	
3			17	
4			12	
5			14	
6			16	
7			11	

Note:

Hiermit bestätige ich verbindlich zur Klausur zur Theoretische Physik Ia WS20xx/20xx angemeldet zu sein. Ich wurde darüber in Kenntnis gesetzt, dass ein Nichtbestehen der Klausur offiziell als Fehlversuch gewertet wird und im Falle einer nicht ordnungsgemäßen Anmeldung die Prüfungsleistung nachträglich als nicht erbracht gewertet werden kann.

Saarbrücken, xx.xx.xxxx ________________________________

Anmerkungen:

- Viele Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar, die Schwierigkeit der einzelnen Aufgabenteile kann aber variieren.
- Machen Sie die Benutzung von Formeln aus der Vorlesung oder den Aufgabentexten deutlich. Definieren Sie Ihre Abkürzungen, falls Sie welche benutzen.
- **Viel Erfolg!**

Hinweise: Diese Probeklausur stellt nur eine mögliche Aufgabenzusammenstellung dar. Die Haupt- und Nachklausur müssen nicht eins zu eins die gleichen Aufgabentypen und Themen beinhalten. Bitte bereiten Sie sich auf alle Themen vor, die in der Vorlesung und Übung gelernt wurden.
In der Haupt- und Nachklausur wird es jeweils auch eine Aufgabe mit Verständnisfragen geben, die kurz und ohne große Rechnungen beantwortet werden sollen. Eine solche Aufgabe mit kurzen Verständnisfragen fehlt hier in der Probeklausur.

Aufgabe 1 *Integration (10 Punkte)*

a) Leiten Sie die Regel für partielle Integration (der eindimensionalen Analysis) aus der Produktregel ab. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie: *(4 Punkte)*

$$\int_0^\infty x e^{-x} \,\mathrm{d}x$$

c) Berechnen Sie: *(4 Punkte)*

$$\int_0^\pi \sin(x)\, e^{\cos(x)} \,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2 *Taylorentwicklung (10 Punkte)*

Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus sind definiert als

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \qquad \text{und} \qquad \cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

a) Berechnen Sie die Taylor-Reihe von $f(x) = \sinh(x)$ um $x = 0$ (mit Rechnung!).
Hinweis: Machen Sie sich zunächst klar, wie die Ableitungen der Hyperbolischen Funktionen miteinander zusammenhängen. *(5 Punkte)*

b) Berechnen Sie die mehrdimensionale Taylor-Reihe von $g(x, y) = \cosh(x)\ln(y + a)$ mit $a > 0$ um den Entwicklungspunkt $(0, 0)$ bis zur 2. Ordnung. *(5 Punkte)*

Aufgabe 3 *Differentialgleichungen (17 Punkte)*

a) Geben Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ der folgenden Differentialgleichung an: *(5 Punkte)*

$$y'(x) = x(\ln x)\, e^{y(x)}$$

b) Bestimmen Sie die Integrationskonstante für die Anfangsbedingung $y(x = 1) = 1$. *(2 Punkte)*

Gegeben sei nun ein ungedämpfter, eindimensionaler harmonischer Oszillator (Masse m, Federkonstante k), an dem für $t \geq 0$ eine **konstante** äußere Kraft F_0 angreift. Für $t < 0$ befindet sich der Oszillator in seiner Gleichgewichtslage und in Ruhe, d.h. es gilt:

$$\dot{x}(t = 0) = 0 \qquad \text{und} \qquad x(t = 0) = 0.$$

c) Geben Sie die Differentialgleichung des Systems an. Wie viele Integrationskonstanten erwarten Sie für die Lösung? *(3 Punkte)*

d) Berechnen Sie die allgemeine Lösung. Beachten Sie, dass es sich um eine inhomogene Differentialgleichung handelt.
Hinweis: Variation der Konstanten ist hier **nicht** erforderlich. *(3 Punkte)*

e) Bestimmen Sie die Integrationskonstanten aus den Anfangsbedingungen. Zeichnen Sie $x(t)$. *(4 Punkte)*

Aufgabe 4 *Komplexe Zahlen (12 Punkte)*

a) Schreiben Sie die komplexen Zahl $z = 1 + i$ in der Exponentialdarstellung $z = re^{i\phi}$. *(1 Punkt)*

b) Bestimmen Sie Betrag und Argument der komplexen Zahlen $z_1 = (1 + i)^{18}$ und $z_2 = (1 - i)^{18}$. Skizzieren Sie z_1 und z_2 in der komplexen Ebene. *(3 Punkte)*

c) Lösen Sie die Gleichung $z^2 + 8z + 17 = 0$. *(4 Punkte)*

d) Leiten Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel die trigonometrischen Additionstheoreme her:

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos a \ \cos b - \sin a \ \sin b \\ \sin(a + b) &= \sin a \ \cos b + \cos a \ \sin b \end{aligned}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 5 *Eigenwerte und Eigenvektoren, Diagonalisierung (14 Punkte)*

Gegeben sei eine lineare Abbildung, R

$$R : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$$

mit folgender Darstellungsmatrix bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{A} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$

$${}_{\mathcal{A}}R_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

a) Begründen Sie, warum die Matrix ${}_{\mathcal{A}}R_{\mathcal{A}}$ orthogonal ist. Geben Sie die Inverse $({}_{\mathcal{A}}R_{\mathcal{A}})^{-1}$ an. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie die (ggf. komplexen) Eigenwerte und Eigenvektoren von ${}_{\mathcal{A}}R_{\mathcal{A}}$. *(6 Punkte)*

c) Geben Sie eine Basis $\mathcal{B}$ an, bezüglich welcher die Darstellungsmatrix diagonal ist. Geben Sie die Darstellungsmatrix in Diagonalform explizit an: ${}_{\mathcal{B}}R_{\mathcal{B}} =?$ *(2 Punkte)*

d) Geben Sie die Basistransformationsmatrix $S \equiv {}_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{B}}$ für den Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{A}$ an, so dass folglich $D = S^{-1} \, {}_{\mathcal{A}}R_{\mathcal{A}} \, S$ Diagonalform hat.
Hinweis: Sie müssen nichts weiter rechnen. *(2 Punkte)*

e) Wir betrachten nun eine andere orthogonale Matrix T mit reellen Eigenwerten λ_i und reellen Eigenvektoren $\mathbf{u}_i$. Zeigen Sie, dass die λ_i nur die Werte ± 1 annehmen können. *(2 Punkte)*

Aufgabe 6 *Konservatives Kraftfeld (16 Punkte)*

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} az^\gamma \\ yz \\ xz + by^2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad a, b, \gamma = \text{const}, \gamma \neq -\frac{1}{2}$$

a) Berechnen Sie die Divergenz des Feldes. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie die Rotation des Feldes. *(3 Punkte)*

c) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ entlang einer Parabel in der Ebene senkrecht auf der $x - y$-Ebene vom Punkt $(0, 0, 0)$ zum Punkt $(1, 1, 1)$.
Hinweis: Der Weg kann folgendermaßen parametrisiert werden:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} , \quad 0 \leq t \leq 1$$

(5 Punkte)

d) Bestimmen Sie die Konstanten a, b, γ so, dass $\mathbf{F}$ ein konservatives Vektorfeld ist. *(2 Punkte)*

e) Bestimmen Sie nun das Potential für das konservative Kraftfeld aus d) durch Integration. *(5 Punkte)*

Aufgabe 7 *Integralsatz von Gauss (11 Punkte)*

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} zy \\ -zx \\ z(x-y) \end{pmatrix}$$

und ein Tetraeder mit den Eckpunkten $\mathcal{O} : (0, 0, 0)$; $\mathcal{A} : (1, 0, 0)$; $\mathcal{B} : (0, 1, 0)$; $\mathcal{C} : (0, 0, 1)$.
Hinweis: Der Tetraeder ist gegeben durch die Menge

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x, y, z \geq 0 \text{ und } 0 \leq x + y + z \leq 1\}$$

a) Skizzieren Sie den Tetraeder. *(1 Punkt)*

b) Bestimmen Sie mithilfe des Satzes von Gauß den Fluss durch die (nach außen gerichtete) Oberfläche des Tetraeders. *(9 Punkte)*

c) Argumentieren Sie, warum das Ergebnis zu erwarten war. *(1 Punkt)*