Theoretische Physik 1b: Klassische Mechanik SoSe 2024

Dozent: Dr. Peter P. Orth
Assistenten: Lukas Krieger & Hiwis

Klausur 1, 100 Punkte
Mo, 19.8.2024, 9-11 Uhr

---

1. Kurzfragen $(3 \times 5 = 15$ Punkte)

(a) Ein dünner gleichförmiger Stab mit der Masse M und der Länge L liegt auf der x-Achse mit dem Mittelpunkt im Ursprung. Bestimmen Sie sein Trägheitsmoment für die Drehung um die z-Achse.

(b) Betrachten Sie zwei Raumzeitereignisse, die in einem Inertialsystem $\mathcal{S}$ die Koordinaten $x^\mu = (-1, 5, -3, 2)c\text{s}$ und $y^\mu = (1, -3, 2, -6)c\text{s}$ besitzen ($c\text{s} =$ Lichtsekunden). Ist es möglich in ein Inertialsystem zu wechseln in dem die beiden Ereignisse zur gleichen Zeit stattfinden? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Nennen Sie die drei Keplerschen Gesetze.

2. Kollision im Weltraum $(3 \times 5 = 15$ Punkte)

Vom Inertialsystem der Erde $\mathcal{S}$ aus betrachtet bewegen sich zwei Raumschiffe in entgegengesetzte Richtungen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich Raumschiff A am Ursprung und habe die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_A = \frac{4}{5}c\hat{\boldsymbol{x}}$. Raumschiff B sei zu $t = 0$ am Punkt $x_B = 35c\text{s}$ und bewege sich mit $\boldsymbol{v}_B = \frac{3}{5}c(-\hat{\boldsymbol{x}})$. Ausser dem Inertialsystem der Erde betrachten wir noch zwei weitere Inertialsysteme $\mathcal{S}'$ und $\mathcal{S}''$. In $\mathcal{S}'$ befinde sich Raumschiff A in Ruhe und in $\mathcal{S}''$ befinde sich Raumschiff B in Ruhe. Die Ursprünge aller drei Inertialsysteme überlappen zum Zeitpunkt $t = t' = t'' = 0$.

(a) Zu welcher Zeit t_c kollidieren die beiden Raumschiffe vom Inertialsystem der Erde aus gesehen.

(b) An welchem Ort und zu welcher Zeit kollidieren die Raumschiffe im Inertialsystem $\mathcal{S}'$, dem Ruhesystem von A.

(c) Welche Geschwindigkeit hat A in $\mathcal{S}''$, dem Ruhesystem von B?

3. Eine Perle auf einem rotierenden Drahtring $(10 + 10 = 20$ Punkte)

Eine Perle der Masse m sitzt reibungsfrei auf einem kreisförmigen Drahtring vom Radius R. Der Ring liegt in einer vertikalen Ebene, die die z Achse enthält und sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{z}}$ um den vertikalen Durchmesser des Rings dreht. Zum Zeitpunkt $t = 0$ liege der Ring in der xz Ebene. Die Lage der Perle auf dem Ring lässt sich mithilfe des Winkels θ angeben, der gegen die Vertikale gemessen wird, so dass $\theta = 0$ dem Punkt am unteren Ende des Rings entspricht.

(a) Drücken Sie die Lagrange-Funktion für das System mithilfe der verallgemeinerten Koordinate θ aus und geben Sie die Bewegungsgleichung für die Perle an.

(b) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspositionen der Perle, d.h. die Positionen, an denen $\theta =$ const. gilt. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis und insbesondere das Verhalten als Funktion von ω.

4. Ebenes Pendel mit zeitabhängiger Fadenlänge $(5 + 10 + 5 + 5 = 25$ Punkte)

Ein ebenes Pendel bestehe aus einer Masse m an einem masselosen Faden, die in einer Ebene unter dem Einfluß der Gravitationskraft schwingt. Das obere Ende des Fadens sei durch ein Loch in der Decke gefädelt und der Faden werde stetig nach oben gezogen, so dass die Fadenlänge des Pendels unterhalb der Decke durch $l(t) = l_0 - \alpha t$ mit $l_0, \alpha > 0$ gegeben sei. Verwenden Sie den Winkel θ zwischen der Normalen und dem Faden als generalisierte Koordinate.

(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion L des Systems.

(b) Bestimmen Sie die Hamiltonfuntion H des Systems. Ist H erhalten? Bestimmen Sie die Energie E der Masse. Gilt $H = E$?

(c) Bestimmen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen des Systems. Entkoppeln Sie diese, um eine Bewegungsgleichung zweiter Ordnung für $\theta(t)$ zu erhalten.

(d) Nehmen Sie an, dass $l(t)$ sich langsam ändere, d.h. approximieren Sie $l(t) \approx l_0$ in der Bewegungsgleichung. Nehmen Sie auch an, dass θ klein sei, d.h. machen eine Taylorentwicklung zur niedrigsten nicht-verschwindenden Ordnung in θund lösen Sie explizit für $\theta(t)$.

5. Ballwurf in rotierender Weltraumkolonie (10 Punkte)

Eine zylindrische Weltraumkolonie habe den Radius R und rotiere mit Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\hat{\boldsymbol{z}}$ um ihre Achse. Bewohner der Kolonie beobachten wie ein Ball mit Masse m von einem Punkt aus, der auf halbem Weg zwischen der Rotationsachse und der Oberfläche der Kolonie liegt, mit der Geschwindigkeit $v = \Omega R/2$ in die Richtung genau gegen die Rotationsrichtung geworfen wird. Legen Sie den Ursprung auf die Zylinderachse, so dass der Startpunkt des Balls bei $t = 0$ am Punkt $x = R/2$, $y = z = 0$ liegt.

Betrachten Sie die Bewegung des Balls im Nichtinertialsystem der Weltraumkolonie. Berechnen Sie dazu die Inertialkräfte, die auf den Ball wirken und skizzieren Sie die resultierende Bewegung im System der Weltraumkolonie.

6. Rotierende Masse am Faden auf einem Tisch (15 Punkte)

Eine Masse m ist am Ende eines masselosen Fadens befestigt. Die Masse bewege sich reibungsfrei auf einem Tisch. Der Faden ist durch ein Loch in der Tischmitte gefädelt und wird am anderen Ende unter dem Tisch festgehalten, so dass er stets gespannt ist. Am Anfang rotiere die Masse auf einer Kreisbahn und besitze die kinetische Energie E_1. Nun werde der Faden langsam eingezogen, so dass der Radius am Ende nur noch die Hälfte des anfänglichen Werts beträgt. Berechnen Sie die Arbeit W, die von der Faden ziehenden Person geleistet wird, und drücken Sie diese durch E_1 aus.