Abgabe bis Dienstag, den 29.04.2025, 14 Uhr über die Moodle-Plattform.

3. [*10 Punkte*] **Perle auf einem rotierenden Draht**

Eine Perle der Masse m gleitet reibungsfrei auf einem starren Draht, der sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse dreht. Der Draht bildet mit der z-Achse einen festen Winkel $0 \leq \alpha \leq \pi$. Die Perle kann sich nur entlang des Drahts bewegen. Die Schwerkraft $\mathbf{F}_g = -mg\hat{\mathbf{e}}_z$ wirkt in negativer z-Richtung.

(a) Formuliere das System mit den Lagrange-Gleichungen 1. Art in Zylinderkoordinaten (r, φ, z). Die Position der Perle lautet in Zylinderkoordinaten $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{e}}_r + z\hat{\mathbf{e}}_z$.

2 i. Bestimme die Bewegungsgleichung der Perle, indem du den Lagrange-Multiplikator eliminierst.
Hinweis: Für die z-Koordinate lautet das Ergebnis: $\ddot{z} = \omega^2 \sin^2\alpha \cdot z - g\cos^2\alpha$.

2 ii. Löse die Bewegungsgleichung mit dem folgenden Ansatz:

$$z(t) = C_1 \exp(\omega t \sin\alpha) + C_2 \exp(-\omega t \sin\alpha) + \frac{g}{\omega^2}\cot^2\alpha$$

und den Anfangsbedingungen $z(0) = \dot{z}(0) = 0$, hierbei sind C_1 und C_2 unbekannte Konstanten.

2 iii. Bestimme nun die exakte Form der beiden Zwangskräfte mit Hilfe der Lösung $z(t)$ und interpretiere deren physikalische Bedeutung.

2 (b) Stelle die Lagrange-Gleichungen 2. Art für dieses System auf und berechne daraus erneut die Bewegungsgleichung.
Hinweis: Siehe Kochrezept aus der Vorlesung und Aufgabe 4(f).

2 (c) Untersuche, ob die Gesamtenergie der Perle erhalten bleibt. Begründe physikalisch, warum sich die Energie verändert.

Hinweis: In Zylinderkoordinaten bilden die Einheitsvektoren

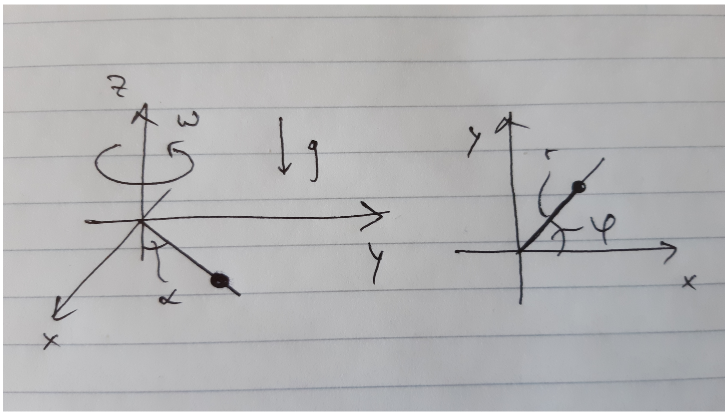
$$\hat{\mathbf{e}}_r = \cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_x + \sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_y, \quad \hat{\mathbf{e}}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_x + \cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_y, \quad \hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_z$$

eine ortsabhängige, orthonormale Basis. Die Beschleunigung lautet in Zylinderkoordinaten

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \ddot{z}\,\hat{\mathbf{e}}_z$$

und der Gradient eines Skalarfeldes $f(r, \varphi, z)$ hat die Form

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\,\hat{\mathbf{e}}_z\,.$$



Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, a.wysocki@lusi.uni-sb.de oder via Moodle
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, thome.marc@lusi.uni-sb.de oder via Moodle
Joshua Weißenfels, s9joweis@uni-saarland.de oder via Moodle
Nic Collingro, nico00001@uni-saarland.de oder via Moodle

4. [*10 Punkte*] **Pendel mit horizontal oszillierendem Aufhängepunkt**

Ein Pendel der Länge ℓ und Masse m ist reibungsfrei an einem Faden aufgehängt, dessen Aufhängepunkt sich mit konstanter Amplitude A und Kreisfrequenz ω in horizontaler Richtung bewegt. Die Position des Aufhängepunkts sei gegeben durch

$$x_A(t) = A\cos(\omega t), \quad y_A(t) = 0\,.$$

Die Bewegung findet in der xy-Ebene statt, wobei die Schwerkraft $\mathbf{F}_g = -mg\hat{\mathbf{e}}_y$ in negativer y-Richtung wirkt.

$\boxed{1}$ (a) Stelle die Zwangsbedingung in kartesischen Koordinaten $x(t), y(t)$ auf, die beschreibt, dass die Masse stets im Abstand ℓ vom Aufhängepunkt bleibt.

$\boxed{1}$ (b) Stelle die Lagrange-Gleichungen 1. Art in den Koordinaten $x(t), y(t)$ auf.

$\boxed{2}$ (c) Verwende die Koordinatentransformation

$$x = r\sin\varphi + A\cos(\omega t), \quad y = -r\cos\varphi\,,$$

um die Lagrange-Gleichungen 1. Art und die Zwangsbedingung in den neuen Koordinaten $r(t)$ und $\varphi(t)$ auszudrücken.

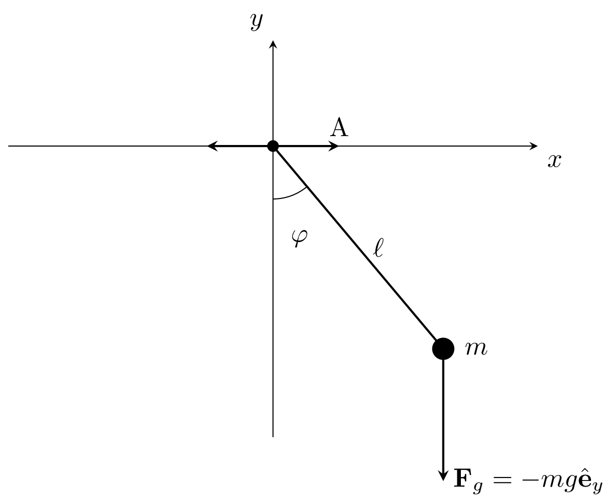
$\boxed{2}$ (d) Bestimme aus den transformierten Lagrange-Gleichungen 1. Art die Bewegungsgleichung und die Zwangskraft $\lambda(t)$.

$\boxed{1}$ (e) Interpretiere die einzelnen Beiträge der Zwangskraft physikalisch.

$\boxed{3}$ (f) Stelle die Lagrange-Gleichungen 2. Art auf. Gehe wie folgt vor:

- Führe dazu eine geeignete generalisierte Koordinate $\varphi(t)$ ein, welche den Winkel des Fadens zur Vertikalen beschreibt.
- Stelle die Lagrange-Funktion $L = T - V$ auf.
- Leite daraus die Bewegungsgleichung für $\varphi(t)$ her.

Hinweis: Die Bewegungsgleichung lautet: $\ddot{\varphi} = \frac{A}{l}\omega^2\cos(\omega t)\cos\varphi - \frac{g}{l}\sin\varphi$



Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, `a.wysocki@lusi.uni-sb.de` oder via Moodle
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, `thome.marc@lusi.uni-sb.de` oder via Moodle
Joshua Weißenfels, `s9joweis@uni-saarland.de` oder via Moodle
Nic Collingro, `nico00001@uni-saarland.de` oder via Moodle