1. [*0 Punkte*] **Perle auf schiefer Ebene**

Wir haben in der ersten Übung gesehen, wie wir mit Hilfe des zweiten Newtonschen Axioms oder des d'Alembert-Prinzips zur Bewegungsgleichung der Perle auf der schiefen Ebene gelangen. Hier sollen zwei weitere Methoden zur Behandlung mechanischer Probleme – nämlich die Lagrange-Gleichungen 1. Art und 2. Art – untersucht werden.

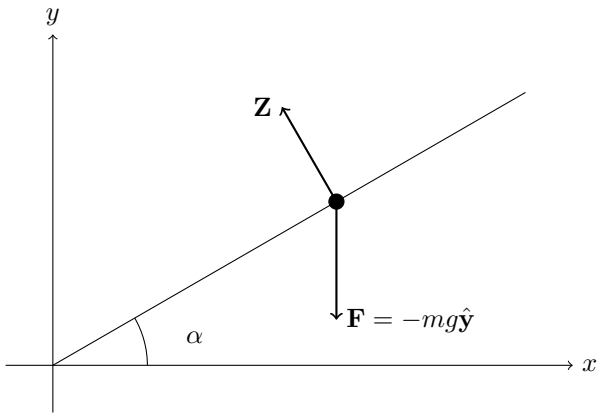
Eine Punktmasse m bewegt sich reibungsfrei auf einer glatten schiefen Ebene mit Neigungswinkel α. Der Punkt wird durch die Koordinaten $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ beschrieben. Die Bewegung erfolgt unter dem Einfluss der Schwerkraft g in negativer y-Richtung.

(a) Formuliere die Zwangsbedingung in Form einer skalaren Gleichung $f(x, y) = 0$, die die Bewegung auf der schiefen Ebene beschreibt.

(b) Stelle die Lagrange-Gleichungen 1. Art mit Hilfe des Multiplikators λ auf. Berechne daraus sowohl die Bewegungsgleichung als auch den Ausdruck für die Zwangskraft $\mathbf{Z} = \lambda \nabla f$ in kartesischen Koordinaten.

(c) Stelle nun die Lagrange-Gleichungen 2. Art auf und berechne daraus die Bewegungsgleichung. Gehe wie folgt vor:

- Schreibe die Lagrange-Funktion $L = T - V$ für das System ohne Berücksichtigung der Zwangsbedingung auf.
- Wähle eine geeignete unabhängige generalisierte Koordinate aus.
- Drücke L in dieser Koordinate aus.
- Stelle schließlich die Lagrange-Gleichung 2. Art auf.



Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, a.wysocki@lusi.uni-sb.de
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, thome.marc@lusi.uni-sb.de
Joshua Weißenfels, s9joweis@uni-saarland.de
Nic Collingro, nico00001@uni-saarland.de

2. [*Punkte*] **Kapitza-Pendel: Vertikal angeregtes Pendel**

Ein mathematisches Pendel der Länge ℓ und Masse m ist an einem Faden aufgehängt, dessen Aufhängepunkt sich in vertikaler Richtung harmonisch bewegt:

$$x_A(t) = 0, \quad y_A(t) = A\cos(\omega t).$$

Die Bewegung findet in der xy-Ebene statt, wobei die Schwerkraft g in negativer y-Richtung wirkt. Die Masse kann frei um den Aufhängepunkt schwingen.

(a) Stelle die Zwangsbedingung (die Masse bleibt stets im Abstand ℓ vom Aufhängepunkt) in kartesischen Koordinaten $x(t), y(t)$ auf.

(b) Stelle die Lagrange-Gleichungen 1. Art in den Koordinaten $x(t), y(t)$ auf.

(c) Verwende die Koordinatentransformation

$$x = r\sin\varphi, \quad y = -r\cos\varphi + A\cos(\omega t)\,.$$

um die Lagrange-Gleichungen 1. Art und die Zwangsbedingung in den neuen Koordinaten $r(t)$ und $\varphi(t)$ auszudrücken.

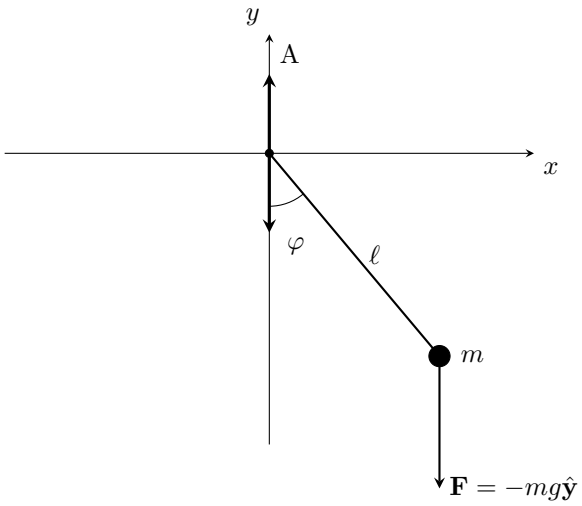
(d) Bestimme aus den transformierten Lagrange-Gleichungen 1. Art die Bewegungsgleichung und die Zwangskraft $\lambda(t)$.

(e) Interpretiere die einzelnen Beiträge der Zwangskraft physikalisch.

(f) Verwende die Lagrange-Gleichung 2. Art. Gehe wie folgt vor:

- Führe dazu eine geeignete generalisierte Koordinate $\varphi(t)$ ein, welche den Winkel des Fadens zur Vertikalen beschreibt.
- Stelle die Lagrange-Funktion $L = T - V$ auf.
- Leite daraus die Bewegungsgleichung für $\varphi(t)$ her.

Hinweis: Die Bewegungsgleichung lautet: $\ddot{\varphi} = \left[\frac{A}{l}\omega^2\cos(\omega t) - \frac{g}{l}\right]\sin\varphi$



Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, a.wysocki@lusi.uni-sb.de
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, thome.marc@lusi.uni-sb.de
Joshua Weißenfels, s9joweis@uni-saarland.de
Nic Collingro, nico00001@uni-saarland.de