# Nichtlineare Dynamik & Strukturbildung (SS24)

VL SS2024, Dr. habil. Philipp Hövel

philipp.hoevel@uni-saarland.de

E2.6, Raum 4.03

22.5 VL: Mi 10–12 E2.6 E11
Do 12–14 E2.6 E11

7.5 UE: s.o.

3 SWS VL, 1 SWS UE $\Rightarrow$ 45h + 15h = 60h

90h Vor-/Nachbereitung $\longrightarrow$ 150h $\hat{=}$ 5 ECTS

$\Rightarrow \frac{\text{VL+UE}}{\text{ECTS-Zeit}} = \frac{60h}{90h} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2:3$

MSc Physik / Biophysik

Note:
- Übungsaufgaben bzw. Seminarvortrag
- anschließend mündliche Prüfung

Stil: austauschorientiert, anregend, inkludierend, animierend
viele Hinweise rechts & links gebend
"Bergführer" & "Coach"

→ Glossar := individuell
- Def., Begriffe
- Erklärungen, Bilder …

# 1. Dynamische Systeme

Nichtlineare Dynamik – wichtige Fragestellungen:

- Langzeitverhalten
- Abhängigkeit von äußeren Parametern (Kontrolle)
- —— " —— kleinen Störungen
- —— " —— Ungenauigkeiten in den Anfangsbedingungen
- globale Aussagen über den dynamischen Fluss
  ↳ Gesamtheit aller Bahnen
- geordnete / ungeordnete Systeme
- ...

⇒ <u>qualitative Dynamik</u>

Bsp.: $\overset{\frac{dx}{dt}}{\dot{x}(t)} = \sin x(t)$

↳ Trennung der Variablen:

$$dt = \frac{dx}{\sin x} \Rightarrow t = \int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln\left|\frac{\sin x}{1+\cos x}\right| + C$$

$$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

$$= -\ln\left|\csc x + \cot x\right| + C$$

$$\Rightarrow \ln\left|\overbrace{\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}}\right| + C$$

etwa: $x = x_0$ bei $t = 0$

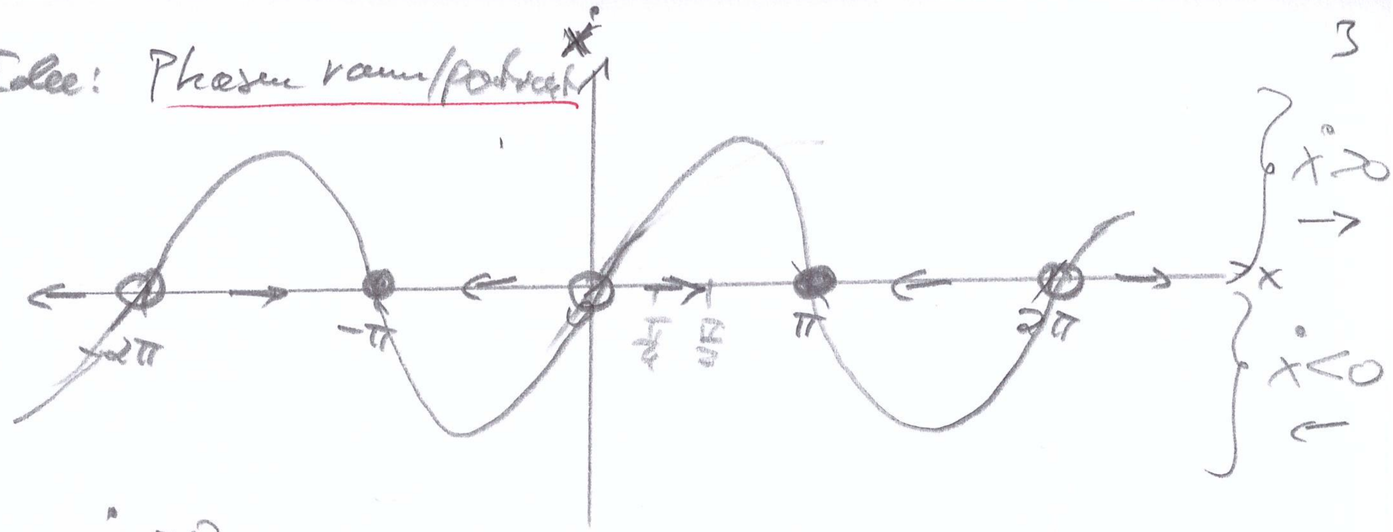
$\Rightarrow C = \ln|\csc x_0 + \cot x_0|$

$$\Rightarrow \quad t = \ln\left|\frac{\csc x_0 + \cot x_0}{\csc x + \cot x}\right|$$

(i) $x_0 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = ?$

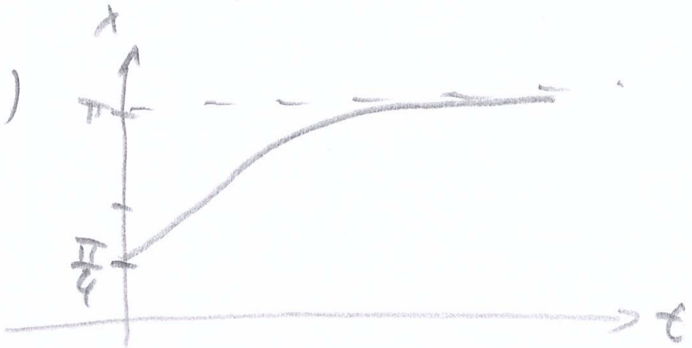
(ii) $x_0$ beliebig $\Rightarrow \lim x(t) = ?$ } Langzeitverhalten

Idee: Phasenraum/portrait



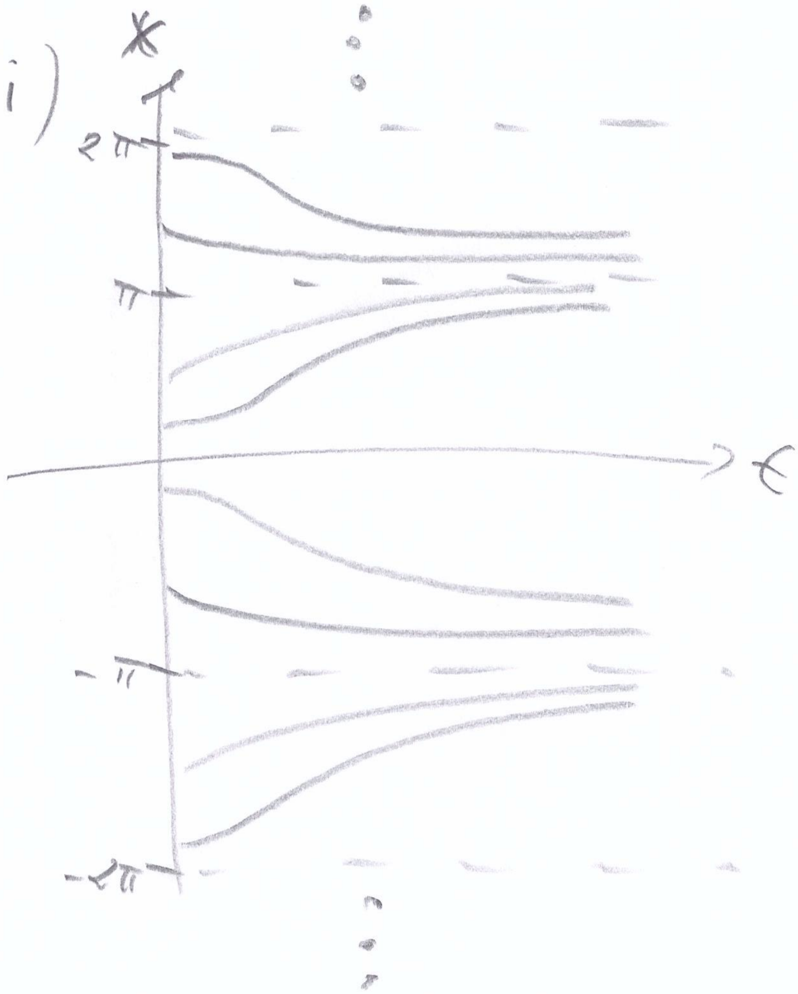

$\dot{x} = 0 \Rightarrow x = n\pi$

(i)




Trajektorie

(ii)



(**Qualitative Dynamik** : Fluss als ganzes, Stabilität, topologische Struktur, Langzeitverhalten)

## 1.1. Vektorfelder als dynam. Systeme

Dynamik vieler Systeme läßt sich als System von (nichtlin.) Dgln. 1. Ordnung formulieren:

$$\boxed{\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)}$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ dyn. Var.

$\underline{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld

determinist. dyn. System

z.B. Newton'sche Beweg.gl. mit Reibung

$$\ddot{y} + \underbrace{f_1(y,t)}_{\text{Reibung}}\dot{y} + \underbrace{f_2(y,t)}_{\text{Kraft}} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 := y \\ x_2 := \dot{y} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -f_1 x_2 - f_2 \end{array}$$

$$\ddot{y} + f_1\dot{y} + f_2 y = F\cos t$$

↳ Dimension? ⇒ 3

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ x_3 = t \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -f_1 x_2 - f_2 + F\cos x_3 \\ \dot{x}_3 = 1 \Rightarrow x_3(t) = t + t_0 \end{array}$$

⇒ n-te Ordg + Zeit $\hat{=}$ (n+1)te Ordng

Speziell Hamilton'sche Systeme:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = q \\ x_2 = p \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{array} \qquad H(q,p) \text{ Hamiltonfkt.}$$

} Stark.

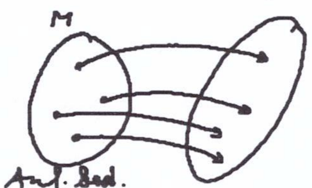
**Fluss des Vektorfeldes $\underline{F}$** auf der Mannigfaltigkeit M: (Phasenraum, z.B. $\mathbb{R}^n$)

$$\Phi : M \times \mathbb{R}_t \to M$$

mit $\Phi(x_0, t) = \Phi_t(x_0)$

$= \underline{x}(t; x_0)$

(Gesamtheit der Bahnkurven) = Trajektorien



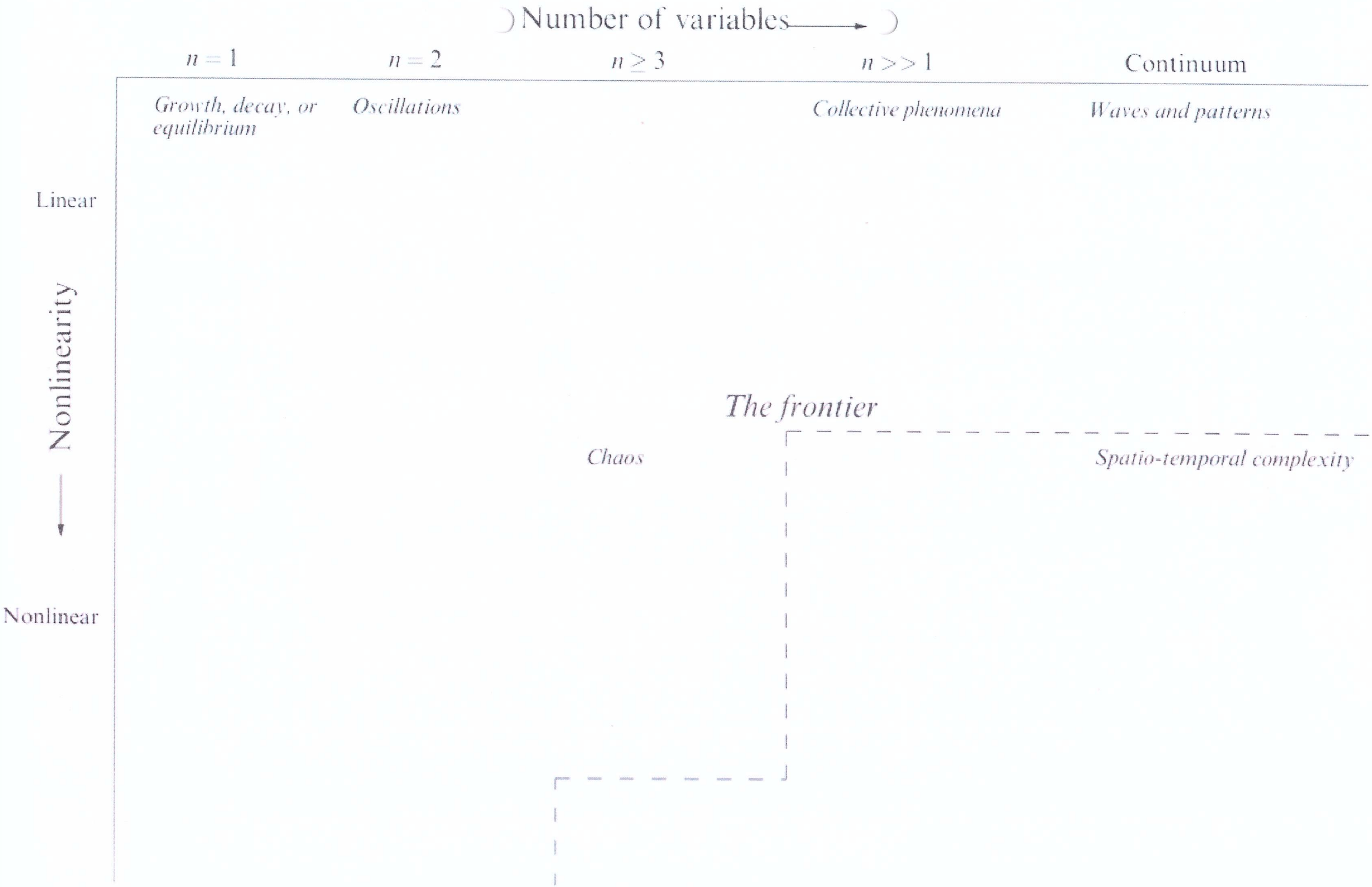
lin. - vs. nonlin.

5

Number of variables →

| Nonlinearity ↓ | $n = 1$ | $n = 2$ | $n \geq 3$ | $n >> 1$ | Continuum |
|---|---|---|---|---|---|
| Linear | *Growth, decay, or equilibrium*<br>Exponential growth<br>RC circuit<br>Radioactive decay | *Oscillations*<br>Linear oscillator<br>Mass and spring<br>RLC circuit<br>2-body problem (Kepler, Newton) | Civil engineering, structures<br>Electrical engineering | *Collective phenomena*<br>Coupled harmonic oscillators<br>Solid-state physics<br>Molecular dynamics<br>Equilibrium statistical mechanics | *Waves and patterns*<br>Elasticity<br>Wave equations<br>Electromagnetism (Maxwell)<br>Quantum mechanics (Schrödinger, Heisenberg, Dirac)<br>Heat and diffusion<br>Acoustics<br>Viscous fluids |
| | | | | *The frontier* | |
| Nonlinear | Fixed points next<br>Bifurcations<br>Overdamped systems, relaxational dynamics<br>Logistic equation for single species | Pendulum<br>Anharmonic oscillators<br>Limit cycles<br>Biological oscillators (neurons, heart cells)<br>Predator-prey cycles<br>Nonlinear electronics (van der Pol, Josephson) | *Chaos*<br>Strange attractors (Lorenz)<br>3-body problem (Poincaré)<br>Chemical kinetics<br>Iterated maps (Feigenbaum)<br>Fractals (Mandelbrot)<br>Forced nonlinear oscillators (Levinson, Smale)<br>Practical uses of chaos<br>Quantum chaos ? | Coupled nonlinear oscillators<br>Lasers, nonlinear optics<br>Nonequilibrium statistical mechanics<br>Nonlinear solid-state physics (semiconductors)<br>Josephson arrays<br>Heart cell synchronization<br>Neural networks<br>Immune system<br>Ecosystems<br>Economics | *Spatio-temporal complexity*<br>Nonlinear waves (shocks, solitons)<br>Plasmas<br>Earthquakes<br>General relativity (Einstein)<br>Quantum field theory<br>Reaction-diffusion, biological and chemical waves<br>Fibrillation<br>Epilepsy<br>Turbulent fluids (Navier-Stokes)<br>Life |

**Figure 1.3.1**



Number of variables
$n = 1$
$n = 2$
$n \geq 3$
$n >> 1$
Continuum
Growth, decay, or equilibrium
Oscillations
Collective phenomena
Waves and patterns
Linear
Nonlinearity
Nonlinear
The frontier
Chaos
Spatio-temporal complexity


5a

$\boxed{\text{Fixpunkt } \underline{x}^*}$ des autonomen dyn. Systems $\underline{\dot{x}} = \underline{F}(\underline{x})$ :
(stationäre Pkte., Gleichgewichtspkte., singuläre Pkte., krit. Pkte)

$$0 \overset{!}{=} \underline{\dot{x}} = F(\underline{x}^*) \quad \Rightarrow \quad \underline{x}^*$$

Stabilität eines Fixpunktes:


Test durch Linearisierung für kleine Auslenkungen
$\delta\underline{x} := \underline{x} - \underline{x}^*$;

$$\boxed{\delta\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)_{x^*} \delta x_k}$$

VL1

$$\boxed{\delta\underline{\dot{x}} = (DF)_* \, \delta\underline{x}}$$ mit $\boxed{\text{Jacobi-Matrix } DF}$

System von lin. Dgl. mit konst. Koeff.

Lösungsansatz $\delta\underline{x}(t) = \underline{\xi}\, e^{\lambda t}$ $\Rightarrow \lambda \underline{\xi} = A \underline{\xi}$

$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$ liefert Eigenwertgl.

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_k & : \text{Eigenwerte} \\ \underline{\xi}^{(k)} & : \text{Eigenvektoren} \end{array}\right\} \text{der Jacobi-Matrix } (DF)_* = A$$

allg. Lösung: $\delta\underline{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \underline{\xi}^{(k)} e^{\lambda_k t}$

( Annahme: keine entarteten Eigenwerte $\lambda_k$
$c_k$ durch Anfangsbed. bestimmt )

Beispiele: (i) Ebenes Pendel $\quad m l^2 \ddot{\varphi} + m g l \sin\varphi = 0$


$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi \\ x_2 = p_\varphi = m l^2 \dot{\varphi} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \dfrac{x_2}{m l^2} \\ \dot{x}_2 = -m g l \sin x_1 \end{array}$$