$\underline{x}^*$: Fixpunkt eines autonomen Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$

$\Rightarrow \dot{\underline{x}} = 0 = \underline{F}(\underline{x}^*)$

(lineare) Stabilitätsanalyse: $\delta\underline{x} = \underline{x} - \underline{x}^*$ (kleine Auslenkungen)

$\Rightarrow$ in 1. Näherung: $\delta\dot{\underline{x}} = \left(\underline{\underline{DF}}\right)_{\underline{x}^*} \delta\underline{x}$, $\underline{\underline{DF}}$: Jacobi-Matrix

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)_{\underline{x}^*} \delta x_k$$

nullte Näherung: $\underline{F}(\underline{x}^*)=0$

$\Rightarrow$ System von linearen DGLs mit konstanten Koeffizienten

$\Rightarrow$ Lösungsansatz: $\delta\underline{x}(t) = \underline{\xi}\, e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \lambda\, \underline{\xi}\, e^{\lambda t} = \underbrace{\left(\underline{\underline{DF}}\right)_{\underline{x}^*}}_{=:\underline{\underline{A}}} \underline{\xi}\, e^{\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda\, \underline{\xi} = \underline{\underline{A}}\, \underline{\xi}$$ Eigenwertgleichung

Berechnung von λ: $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = 0$ liefert λ_k: Eigenwerte $k = 1, \dots, n$

Einheitsmatrix

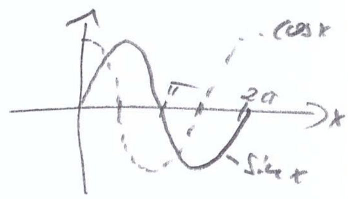
$\underline{\xi}^{(k)}$: Eigenvektoren

allgemeine Lösung: $\delta\underline{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \underline{\xi}^{(k)} e^{\lambda_k t}$

Bsp.: (i) Ebenes/mathematisches Pendel

$$m l \ddot{\varphi} + m g \sin\varphi = 0 \qquad \text{Einheitencheck } [m l \ddot{\varphi}] = \frac{kg\, m}{s^2} = [m g \sin\varphi]$$

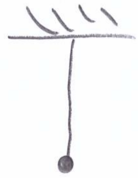
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi \\ x_2 &= p_\varphi = m l \dot{\varphi} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_2}{m l} \\ \dot{x}_2 &= -m g \sin x_1 \end{aligned}$$



Fixpunkte: $\dot{x}_1 = 0 = \dot{x}_2 \Rightarrow x_2 = 0$, $x_1 = n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$

Linearisierung: $$\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml} \\ -mg\cos x_1 & 0 \end{pmatrix}_{\underline{x}^*} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

a) $x_1^* = x_2^* = 0$ (ähnlich auch $x_1^* = 2n\pi$, $n = 1, 2, \dots$)

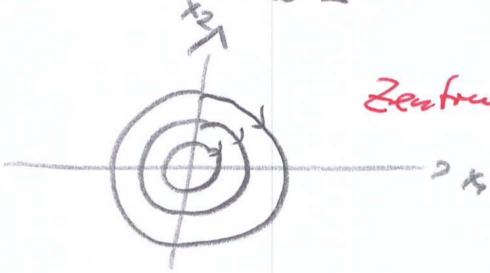


$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml} \\ -mg & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = \det\begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{ml} \\ -mg & -\lambda \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}} = \pm i\omega$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = \delta\underline{x}(t) + \underbrace{\underline{x}^*}_{=0} = C_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{+i\omega t} + C_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{-i\omega t}$$

ungedämpfte Schwingung



Zentrum

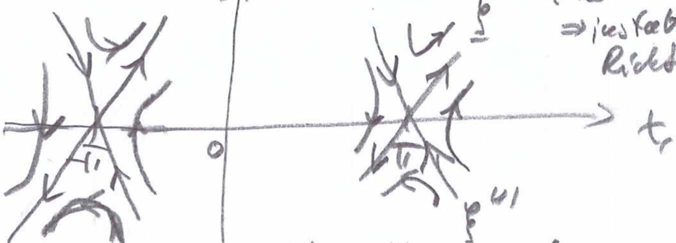
b) $x_2^* = 0$, $x_1^* = \pi$ (oder $x_1^* = (2n+1)\pi$)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml} \\ mg & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{ml} \\ mg & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{g}{l}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\Rightarrow \delta\underline{x}(t) = C_1 \underline{\xi}^{(1)} \underbrace{e^{+\sqrt{\frac{g}{l}}\, t}}_{\xrightarrow{t\to\infty} \infty} + C_2 \underline{\xi}^{(2)} \underbrace{e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}\, t}}_{\xrightarrow{t\to\infty} 0}$$

$\Rightarrow$ instabile Richtung!



Sattelpunkt

$\underline{\underline{A}}$ nicht symmetrisch! $\Rightarrow \underline{\xi}^{(1)} \not\perp \underline{\xi}^{(2)}$ Achtung: lokale Aussagen!

(ii) Ebenes Pendel mit Reibung: $\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0$

$$\hookrightarrow \left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_2}{ml} \\ \dot{x}_2 &= -mg\sin x_1 - 2\gamma x_2 \end{aligned}\right\} \text{ Fixpunkte unverändert}$$

Linearisierung: $$\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml} \\ -mg\cos x_1^* & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

a) $x_1^* = x_2^* = 0$:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml} \\ -mg & -2\gamma \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{ml} \\ -mg & -2\gamma-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \frac{g}{l}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

(a1) Schwache Reibung: $\gamma^2 < \omega^2$

$$\delta\underline{x}(t) = C_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{-\gamma t} e^{i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t} + C_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{-\gamma t} e^{-i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t}$$

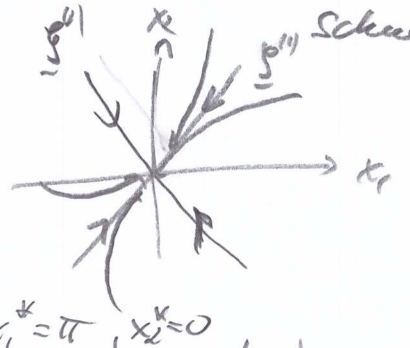
gedämpfte Schwingung:

Stabiler Fokus

(a2) Starke Reibung: $\gamma^2 > \omega^2$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$$

$$\Rightarrow \delta\underline{x}(t) = \underbrace{C_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{\left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t}}_{\text{schnellere Richtung}} + \underbrace{C_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t}}_{\text{langsamere Richtung}}$$



Stabiler Knoten

b) $x_1^* = \pi$, $x_2^* = 0$

$$\Rightarrow \underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml} \\ mg & -2\gamma \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{ml} \\ mg & -2\gamma-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\gamma\lambda - \omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \underbrace{\sqrt{\omega^2+\gamma^2}}_{>\gamma} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{matrix}$$

Sattelpunkt

1.2. Stabilität und Langzeitverhalten

Sei $\underline{x}^*$ Fixpunkt des dynamischen Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t)$.

Def: $\underline{x}^*$ heißt (Ljapunov-) stabil, wenn es zu jeder Umgebung U von $\underline{x}^*$ eine Umgebung V von $\underline{x}^*$ gibt, so dass gilt:

$$\underline{x} \in V \Rightarrow \phi(\underline{x},t) \in U \quad \forall t \geq 0.$$

„Trajektorien bleiben in der Nähe"
(Zentren eingeschlossen)

Kriterium: Kein Eigenwert von $(\underline{\underline{DF}})_{\underline{x}^*}$ positiv
($\lambda = 0$ erlaubt)

Def: $\underline{x}^*$ heißt asymptotisch stabil, wenn zu $\underline{x}^*$ eine Umgebung U existiert, so dass gilt:

(i) $\phi(U,t_2) \subset \phi(U,t_1) \subset U$ für $0 < t_1 < t_2$

(ii) $\lim\limits_{t \to \infty} \phi(\underline{x},t) = \underline{x}^* \quad \forall \underline{x} \in U$

Kriterium: Alle Eigenwerte von $(\underline{\underline{DF}})_{\underline{x}^*}$ negativ.

Def: Ein dynamisches System heißt dissipativ, wenn Phasenraumvolumina schrumpfen.

Aufgabe zum Denken bis VL 3:

Hamiltonsche Systeme: $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$

Frage: Sind Fixpunkte Hamiltonscher Systeme asymptotisch stabil?