allgemeines System mit $n=2$

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \delta\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\delta\underline{x}$$

Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$:

$$0 \overset{!}{=} \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \mathbb{1}) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21}$$

$$= \lambda^2 - \lambda\underbrace{(a_{11}+a_{22})}_{=\operatorname{tr}\underline{\underline{A}}\ (\text{Spur})} + \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{\det\underline{\underline{A}}}$$

$$= \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}\underline{\underline{A}} + \det\underline{\underline{A}}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}\underline{\underline{A}} \pm \sqrt{(\operatorname{tr}\underline{\underline{A}})^2 - 4\det\underline{\underline{A}}}\right)$$

Bemerkung: $\operatorname{tr}\underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \operatorname{div}\underline{f}$ (Divergenz)

Fallunterscheidung:

(a) **stabiler Fokus**: $\det\underline{\underline{A}} > 0$, $\operatorname{tr}\underline{\underline{A}} < 0$

Für $(\operatorname{tr}\underline{\underline{A}})^2 < 4\det\underline{\underline{A}}$: $\lambda_{1,2} = -\lambda_0 \pm i\omega$ mit $\lambda_0, \omega > 0$

$\Rightarrow$ gedämpfte Oszillationen

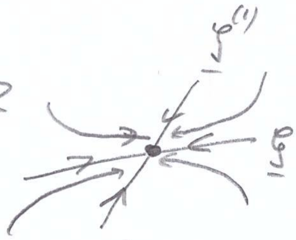
(b) **instabiler Fokus**: $\det\underline{\underline{A}} > 0$, $\operatorname{tr}\underline{\underline{A}} > 0$

Für $(\operatorname{tr}\underline{\underline{A}})^2 < 4\det\underline{\underline{A}}$: $\lambda_{1,2} = +\lambda_0 \pm i\omega$ mit $\lambda_0, \omega > 0$

$\Rightarrow$ entdämpfte Oszillationen

(c) **stabiler Knoten**: $\det\underline{\underline{A}} > 0$, $\operatorname{tr}\underline{\underline{A}} < 0$

Für $(\operatorname{tr}\underline{\underline{A}})^2 > 4\det\underline{\underline{A}}$: $\left.\begin{matrix} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{matrix}\right\} \in \mathbb{R}$



langsam

hier $|\lambda_1| > |\lambda_2|$

schnell

$\Rightarrow$ exponentieller Zerfall

(d) **instabiler Knoten**: $\det\underline{\underline{A}} > 0$, $\operatorname{tr}\underline{\underline{A}} > 0$

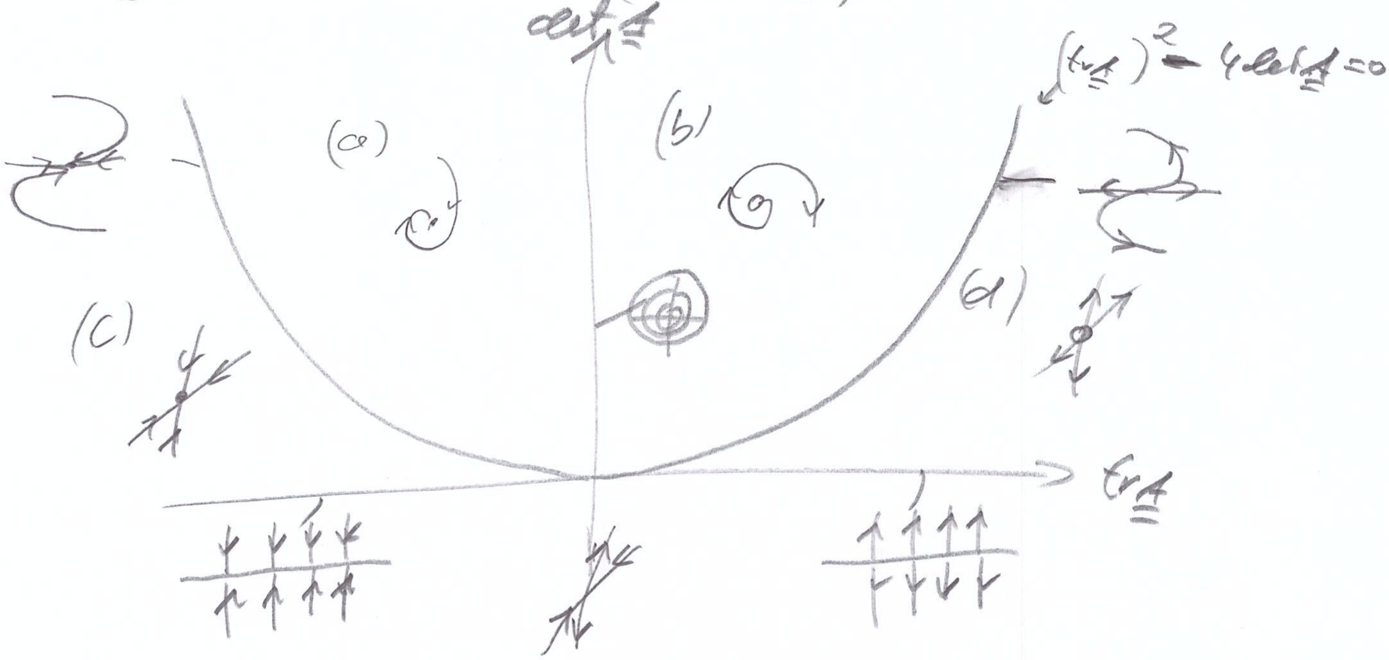
Für $(\operatorname{tr}\underline{\underline{A}})^2 > 4\det\underline{\underline{A}}$: $\left.\begin{matrix} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{matrix}\right\} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ exponentielle Entdämpfung

(e) **Sattelpunkt**: $\det \underline{\underline{A}} < 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 > 0\\ \lambda_2 < 0\end{array}\right\} \in \mathbb{R}$$

alles zusammen in der $(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}}, \det \underline{\underline{A}})$-Ebene:



Grenze zwischen den 5 Bereichen: entartete Fälle
$\Rightarrow$ lineare Stabilitätsanalyse versagt
(Zentrum, schwache stabiler/instabiler Fokus)

Hamiltonsche Vektorfelder:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2f}$$

f: # Freiheitsgrade

Linearisierung um Fixpunkt $\underline{x}^*$: $\delta\underline{x} = \underline{x} - \underline{x}^* \Rightarrow \delta\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\delta\underline{x}$

$$= \sum_{k=1}^{2f} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)_{\underline{x}^*} \delta x_k$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr}\underline{\underline{A}} = \operatorname{div}\underline{F} = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = 0$$

Aus $0 = \operatorname{tr}\underline{\underline{A}}$ $\left(= \sum_{k=1}^{2f} \lambda_k\right)$ folgt: Keine asymptotisch stabilen Fixpunkte möglich!

Beweis: sonst müssten <u>alle</u> $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$ sein!

$$\Rightarrow \operatorname{tr}\underline{\underline{A}} = \sum_{k=1}^{2f} \operatorname{Re}\lambda_k + i \underbrace{\sum_{k=1}^{2f} \operatorname{Im}\lambda_k}_{=0 \text{ (komplex konj.)}} < 0 \quad \lightning$$

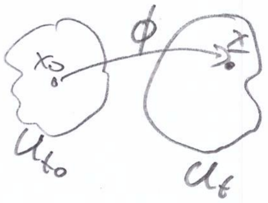
Nicht asymptotisch stabil, falls <u>kein</u> $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$

$\Rightarrow$ nur $\operatorname{Re}\lambda_k = 0$ erlaubt $\Rightarrow \lambda_k = \pm i\omega \Rightarrow$ Zentren

Für Hamiltonsche Systeme folgt aus $\operatorname{tr}\underline{\underline{A}} = \operatorname{div}\underline{F} = 0$ der Liouvillesche Satz der klassischen, statistischen Mechanik

Phasenraumvolumen V_t zur Zeit t:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}), \quad \underline{\underline{A}} = D\underline{F}\big|_{\underline{x}^*}$$



$$V_t = \int_{U_t} d^{2f}x$$

Parametrisierung

$$= \int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0 \, \det D\phi_t(x_0)$$

$$= \int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0 \left[1 + (t-t_0) \underbrace{\sum_{k=1}^{2f} \frac{\partial F_k}{\partial x_0^{(k)}}}_{=\operatorname{div}\underline{F}} + \dots \right]$$

$$= V_{t_0} + (t-t_0) \int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0 \, \operatorname{div}\underline{F}\big|_{x_0} + O((t-t_0)^2)$$

$$\phi_t(x_0) = \underline{x}(t)$$

$$D\phi_t(x_0) = \frac{\partial x^{(i)}(t)}{\partial x_0^{(k)}} \approx \underbrace{\frac{\partial x_0^{(i)}}{\partial x_0^{(k)}}}_{\delta_{ik}} + (t-t_0)\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x^{(i)}(t)}{\partial x_0^{(k)}}}_{\frac{\partial F_i}{\partial x_0^{(k)}}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} V_t = \lim_{t \to t_0} \frac{V_t - V_{t_0}}{t - t_0} = \int_{U_t} d^{2f}x_0 \underbrace{(\operatorname{div}\underline{F})_{x_0}}_{=0} = 0$$

Somit bleibt das Phasenraumvolumen erhalten!

Für **dissipative Systeme** gilt für kleine Volumina, die einen asymptotisch stabilen Fixpunkt $\underline{x}^*$ umschließen:

$$\frac{dV_t}{dt} \approx \int_{U_t} d^{2k}x_0 \left(\mathrm{div}\,\underline{F}\right)_{\underline{x}^*} = \Lambda V_t \Rightarrow V(t) = e^{\Lambda t} V_0$$

mit der Phasenraumkontraktionsrate $\Lambda = \mathrm{div}\,\underline{F} = \mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}} = \sum_{k=1}^{2k} \mathrm{Re}\,\lambda_k$
< 0

Def.: Dissipative Systeme sind solche, die Phasenraumvolumina kontrahieren.

Das **Langzeitverhalten** dissipativer Systeme wird durch **Attraktoren** bestimmt.

Bsp. für dissipatives System: Lorenz-Modell
(Edward Lorenz, J. Atmos. Science 20, 130 (1963))

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= -xz + rz - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &x=y=z=0 \text{ ist Fixpunkt} \\ &D\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z & -1 & r-x \\ y & x & -b \end{pmatrix}. \end{aligned} \qquad \sigma, r, b > 0$$

$$\Rightarrow \Lambda = \mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}} = -(\sigma+1+b) < 0$$

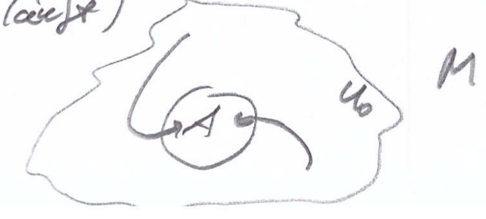
$$\Rightarrow V(t) = e^{-(\sigma+1+b)t} V_0 \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

Def.: Sei $\underline{F}$ ein Vektorfeld auf M (hier meist $\mathbb{R}^n$). Eine abgeschlossene, unter dem Fluss φ_t invariante ($\varphi_t(A) \subseteq A$), unzerlegbare Teilmenge $A \subset M$ heißt **Attraktor**, wenn

(i) $A \subset U_0$ (offene Umgebung von A) existiert mit $\varphi_t(U_0) \subseteq U_0^{(t)}$

(ii) $\forall V$ mit $A \subset V \subset U_0$ existiert $T > 0$, sodass $\varphi_t(U_0) \subset V$ für $t > T$

(d.h. es gibt ein **Attraktorbecken** U_0, aus dem der Fluss asymptotisch in den Attraktor läuft)



Beispiele

Dimension n des Phasenraums	Attraktor	Attraktor-dimension d	Bild
1	stabiler Fixpunkt	0	
2	stabiler Grenzzyklus	1	 periodischer Orbit
3	stabiler Torus	2	 quasiperiodisch (2 Frequenzen $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$
≥ 3	seltsamer Attraktor	$2 < d < 3$ fraktal	chaotisch